۱- معادله مقابل را در $\mathbb{C}$ حل کنید: $z^{۷}-۷z^{۴}-۸z=۰$

$$z^{۷}-۷z^{۴}-۸z=z(z^{۶}-۷z^{۳}-۸)=۰$$

در نتیجه $z=۰$ یکی از جواب های معادله است و $z^{۶}-۷z^{۳}-۸=۰$.

$$(z^{۳})^{۲}-۷z^{۳}-۸=۰ \qquad \Rightarrow z^{۳}=\frac{۷\pm\sqrt{۴۹+۳۲}}{۲}=۸,-۱$$

از $z^{۳}=۸$ داریم:

$$z=۲e^{i\frac{۲k\pi+۰}{۳}}=\begin{cases} ۲ & k=۰ \\ ۲e^{\frac{۲i\pi}{۳}}=-۱+i\sqrt{۳} & k=۱ \\ ۲e^{\frac{۴i\pi}{۳}}=-۱-i\sqrt{۳} & k=۲ \end{cases}$$

از $z^{۳}=-۱$ داریم:

$$z=e^{i\frac{۲k\pi+\pi}{۳}}=\begin{cases} e^{\frac{i\pi}{۳}}=\frac{۱}{۲}+\frac{i\sqrt{۳}}{۲} & k=۰ \\ e^{i\pi}=-۱ & k=۱ \\ e^{\frac{۵i\pi}{۳}}=\frac{۱}{۲}-\frac{i\sqrt{۳}}{۲} & k=۲ \end{cases}$$

۲- حدهای زیر را بیابید:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+۵}{x-۴}\right)^{\frac{x+۱}{۲}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+۵}{x-۴}\right)^{\frac{x+۱}{۲}}=\lim_{x\to+\infty}\left(۱+\frac{۹}{x-۴}\right)^{\frac{x+۱}{۲}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{۹}{x-۴}\times\frac{x+۱}{۲}}=e^{\frac{۹}{۲}}$$

-- همچنین می توانیم با استفاده از لگاریتم گیری از حد و بهره گیری از قاعده هوپیتال به جواب برسیم (امتحان کنید).

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n}{i^{۲}-۵in+۶n^{۲}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n}{i^{۲}-۵in+۶n^{۲}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{\left(\frac{i}{n}\right)^{۲}-۵\left(\frac{i}{n}\right)+۶}=\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{x^{۲}-۵x+۶}$$

$$=\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{x-۳}-\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{x-۲}$$

$$=\ln\frac{x-۳}{x-۲}\Big|_{۰}^{۱}=۲\ln ۲-\ln ۳$$

۳- با کمک قضیه مقدار میانگین ثابت کنید:

$$\frac{۴}{۱۱} \le \ln\frac{۱۱}{۷} \le \frac{۴}{۷}$$

$$\ln\frac{۱۱}{۷} = \ln ۱۱ - \ln ۷ \qquad , \frac{\ln ۱۱ - \ln ۷}{۱۱-۷} = \frac{۱}{c} \qquad , ۷ < c < ۱۱$$

$$۷ < c < ۱۱ \qquad \Rightarrow \frac{۱}{۱۱} < \frac{۱}{c} < \frac{۱}{۷}$$

و در نتیجه:

$$\frac{۱}{۱۱} < \frac{\ln ۱۱ - \ln ۷}{۴} = \frac{۱}{c} < \frac{۱}{۷} \qquad \Rightarrow \frac{۴}{۱۱} < \ln ۱۱ - \ln ۷ = \ln\frac{۱۱}{۷} < \frac{۴}{۷}$$

۴- انتگرال های زیر را بیابید.

$$\int \sqrt[۳]{e^{۸x} + e^{۶x}}\, dx$$

با جانشانی $e^{۲x} + ۱ = t^۳$ و $۲e^{۲x}dx = ۳t^۲dt$ داریم:

$$\int \sqrt[۳]{e^{۸x} + e^{۶x}}\, dx = \int \sqrt[۳]{e^{۲x}+۱} \times e^{۲x} dx = \frac{۳}{۲}\int t^۳ dt = \frac{۳}{۸}t^۴ + C = \frac{۳(e^{۲x}+۱)\sqrt[۳]{e^{۲x}+۱}}{۸} + C$$

$$\int \frac{dx}{۲ + ۲\cos x + ۳\sin x}$$

با جانشانی $\tan\frac{x}{۲} = t$ و $\sin\frac{x}{۲} = \frac{۲t}{۱+t^۲}$ و $\cos\frac{x}{۲} = \frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}$ و $dx = \frac{۲dt}{۱+t^۲}$ داریم:

$$\int \frac{dx}{۲ + ۲\cos x + ۳\sin x} = \int \frac{dt}{۲ + ۳t} = \frac{۱}{۳}\ln|۲ + ۳t| + C = \frac{۱}{۳}\ln\left|۲ + ۳\tan^۲\frac{x}{۲}\right| + C$$

۵-انتگرال مجازی $\int_{\ln ۳}^{+\infty} \frac{e^x dx}{۴ + (e^x - ۱)^۲}$ همگراست یا واگرا (درصورت همگرایی مقدار انتگرال چیست؟).

با بهره گیری از آزمون مقایسه حدی داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{۴+(e^x-۱)^۲}}{\frac{۱}{x^۲}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲e^x}{۴+(e^x-۱)^۲} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^۲+۲x)e^x}{۲e^x(e^x-۱)} = ۰$$

با توجه به همگرا بودن $\int_{\ln ۳}^{+\infty} \frac{dx}{x^۲}$ ، انتگرال $\int_{\ln ۳}^{+\infty} \frac{e^x dx}{۴+(e^x-۱)^۲}$ نیز همگراست.

مقدار انتگرال را محاسبه می کنیم:

با جانشانی $e^x - ۱ = t$ و $e^x dx = dt$ خواهیم داشت:

$$\int_{\ln ۳}^{+\infty} \frac{e^x dx}{۴+(e^x-۱)^۲} = \int_{۲}^{+\infty} \frac{dt}{۴+t^۲} = \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}\frac{t}{۲}\Big|_{۲}^{+\infty} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\pi}{۸}$$

۶- هر گاه $f:R\to R$ مشتق پذیر با مشتق پیوسته باشد و $f(۰)=f(۱)=۰$ و $\int_۰^۱ (f(x))^۲dx=۱$ به کمک انتگرال گیری جزء به جزء مقدار انتگرال مقابل را بیابید: $\int_۰^۱ xf(x)f'(x)dx$

قرار می دهیم:

$$u=x \qquad du=dx$$

$$f(x)f'(x)dx=dv \quad v=\frac{(f(x))^۲}{۲}$$

و در نتیجه:

$$\int_۰^۱ xf(x)f'(x)dx=\left.\frac{x(f(x))^۲}{۲}\right|_۰^۱-\frac{۱}{۲}\int_۰^۱(f(x))^۲dx=-\frac{۱}{۲}$$

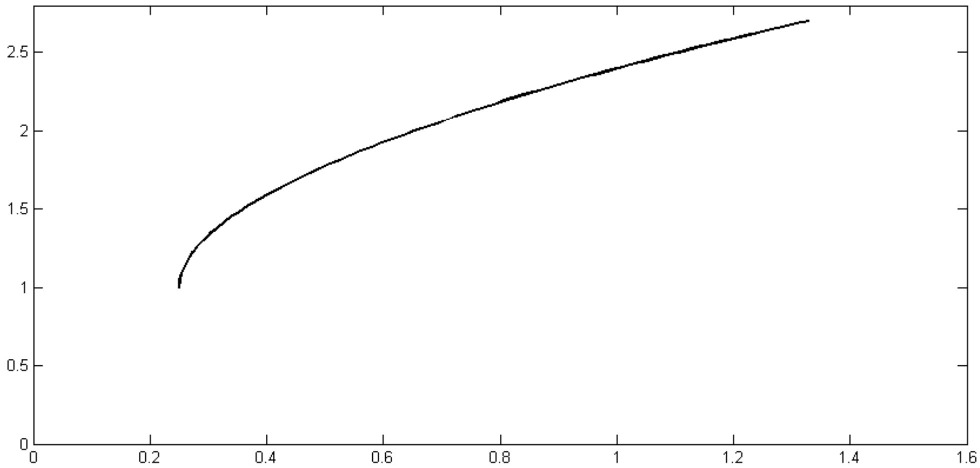
۷- مطلوب است محاسبه طول خم $C:\begin{cases}۴x=t-\ln t\\ y=\sqrt{t}\end{cases}$ در فاصله $۱\le t\le e^۲$.

$$x=\frac{t-\ln t}{۴} \qquad x'=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴t}=\frac{t-۱}{۴t}$$

$$y=\sqrt{t} \qquad \Rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}$$

و در نتیجه:

$$\ell=\int_۱^{e^۲}\sqrt{\left(\frac{t-۱}{۴t}\right)^۲+\left(\frac{۱}{۲\sqrt{t}}\right)^۲}\,dt==\int_۱^{e^۲}\sqrt{\frac{t^۲+۲t+۱}{۱۶t^۲}}dt=\frac{۱}{۴}\int_۱^{e^۲}\frac{t+۱}{t}dt=\frac{۱}{۴}[t+\ln t]_۱^{e^۲}$$
$$=\frac{e^۲+۱}{۴}$$



۸- کدامیک از سری های داده شده همگرا هستند؟(با ذکر دلیل)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cosh n}{e^n+2}$$

با توجه به اینکه :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cosh n}{e^n+2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{e^n+2}=\frac{1}{2}$$

جمله عمومی سری به سمت صفر میل نکرده و سری واگراست.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^2+3n+1}$$

از آزمون مقایسه حدی بهره می گیریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^2+3n+1}}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^p\ln n}{n^2+3n+1}$$

اگر $1<p<2$ حد بالا به سمت صفر میل می کند و با توجه به همگرا بودن سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ به ازای $1<p<2$ ، سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^2+3n+1}$ نیز همگراست.

۹- با استفاده از بسط تیلور تابع $f(x)=\frac{e^{x^3}}{1-x^2}$ حول صفر، مقدار $f^{(6)}(0)$ چیست؟

$$e^{x^3}=1+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^6}{2!}+\frac{x^9}{3!}+\frac{x^{12}}{4!}+\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\cdots\cdots \qquad |x|<1$$

بنابراین:

$$f(x)=\frac{e^{x^3}}{1-x^2}=1+x^2+x^3+x^4+x^5+\frac{3x^6}{2}+\cdots\cdots$$

$$=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6+\cdots\cdots$$

پس با در نظر گرفتن ضریب x^6 در دو سوی برابری خواهیم داشت:

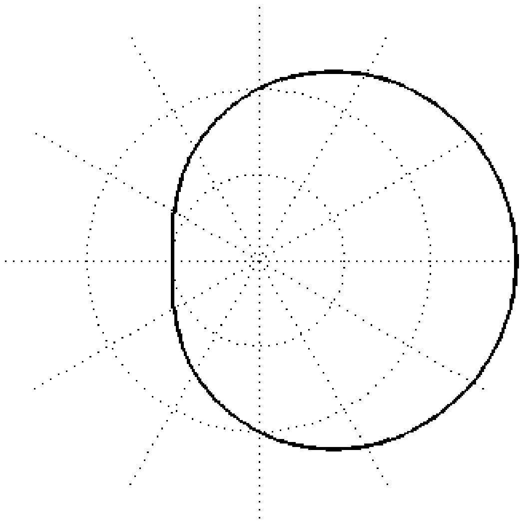
$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!}=\frac{3}{2}\quad\Rightarrow f^{(6)}(0)=1080$$

۱۰- منحنی قطبی $r=۲+\cos\theta$ را رسم کنید و سپس مساحت محدود در آن را بیابید.

با توجه به اینکه $۲+\cos\theta=۲+\cos(-\theta)$ منحنی نسبت به محور قطبی متقارن است و در نتیجه:

θ	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π
r	۳	$۲+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$۲+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۵}{۲}$	۲	$\frac{۳}{۲}$	$۲-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$۲-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱

نمودار در زیر رسم شده است:



برای یافتن مساحت درون نمودار داریم:

$$A=۲\int_{۰}^{\pi}\frac{r^{۲}}{۲}d\theta=\int_{۰}^{\pi}(۲+\cos\theta)^{۲}d\theta=۴\int_{۰}^{\pi}d\theta+۴\int_{۰}^{\pi}\cos\theta d\theta+\int_{۰}^{\pi}\cos^{۲}\theta d\theta$$

$$=۴\pi+۰+\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\pi}(۱+\cos ۲\theta)d\theta=\frac{۹\pi}{۲}$$

۱- جواب های معادله $z^{۳}=\left(\frac{۱-i}{۱+i}\right)^{۲}$ چیست؟

با توجه به اینکه :

$$\frac{۱-i}{۱+i}=\frac{\sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-i\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)}{\sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)}=\frac{e^{-i\frac{\pi}{۴}}}{e^{i\frac{\pi}{۴}}}=e^{-i\frac{\pi}{۲}}$$

باید ریشه های سوم عدد $\left(e^{-i\frac{\pi}{۲}}\right)^{۲}=e^{-i\pi}=-۱$ را بیابیم:

$$z_k=e^{i\frac{۲k\pi-\pi}{۳}}=e^{i\frac{(۴k-۱)\pi}{۳}}\qquad k=۰,۱,۲$$

و در نتیجه:

$$z_۰=e^{-i\frac{\pi}{۳}}=\frac{۱}{۲}-\frac{i\sqrt{۳}}{۲}$$
$$z_۱=e^{i\frac{\pi}{۳}}=\frac{۱}{۲}+i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$z_۲=e^{i\pi}=-۱$$

۲- با استفاده از قضیه مقدار میانگین ثابت کنید: برای $x\geq ۰$ داریم:

$$\ln(۱+x)\leq x$$

بنابر قضیه مقدار میانگین داریم:

$$\frac{\ln(۱+x)-\ln(۱)}{(۱+x)-۱}=\frac{\ln(۱+x)}{x}=\frac{d}{dx}\ln(۱+c)\Big|_{۰\leq c\leq x}=\frac{۱}{۱+c}$$

از سوی دیگر از $۰\leq c\leq x$ به دست می آوریم:

$$۱\leq ۱+c\leq ۱+x\Rightarrow \frac{۱}{۱+x}\leq\frac{۱}{۱+c}\leq ۱$$

و بنابراین:

$$\frac{۱}{۱+x}\leq\frac{\ln(۱+x)}{x}\leq ۱$$

یا:

$$\frac{x}{۱+x}\leq\ln(۱+x)\leq x$$

۳- حدود زیر را بیابید:

الف- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}+x\right)^{\frac{۲}{x}}$

روش اول : $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to+\infty}} (1+\alpha)^{\beta} = e^{\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to+\infty}} \alpha\beta}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x}+x\right)^{\frac{2}{x}} = e^{2}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{e^{x}}\right)^{\frac{2}{x}}$$
$$= e^{2}\times e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}\frac{2}{x}} = e^{2}$$

روش دوم:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x}+x\right)^{\frac{2}{x}}$$

$$\ln A = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^{x}+x\right)^{\frac{2}{x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln\left(e^{x}+x\right)}{x} \overset{HOP}{=} 2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+1}{e^{x}+x}$$
$$\overset{HOP}{=} 2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}+1} = 2$$

ب-
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^{2}}\cos\left(\frac{i}{n}\right)^{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^{2}}\cos\left(\frac{i}{n}\right)^{2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cos\left(\frac{i}{n}\right)^{2}$$
$$=\int_{0}^{1}x\cos x^{2}dx$$

و با جانشانی $u=x^{2}$ و $\frac{1}{2}du=xdx$ خواهیم داشت:

$$\int_{0}^{1}x\cos x^{2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\cos u\,du=\frac{1}{2}\sin u\Big|_{0}^{1}=\sin 1$$

۴- انتگرال های زیر را بیابید:

الف:
$$\int\frac{e^{x}dx}{e^{2x}-3e^{x}+2}$$

با جانشانی $t=e^{x}$ و $dt=e^{x}dx$ خواهیم داشت:

$$\int\frac{e^{x}dx}{e^{2x}-3e^{x}+2} = \int\frac{dt}{t^{2}-3t+2}$$
$$=\int\frac{dt}{(t-2)(t-1)}$$

و بالاخره با توجه به اینکه:

$$\frac{1}{(t-2)(t-1)}=\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t-1}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int\frac{dt}{(t-۲)(t-۱)} &= \int\frac{dt}{t-۲}-\int\frac{dt}{t-۱}\\ &= \ln|t-۲|-\ln|t-۱|+C\\ &= \ln\left|\frac{t-۲}{t-۱}\right|+C\end{aligned}$$

و بالاخره با جایگذاری مجدد داریم:

$$\int\frac{e^x dx}{e^{۲x}-۳e^x+۲}=\ln\left|\frac{e^x-۲}{e^x-۱}\right|+C$$

ب- $\int\frac{\sin(\ln x)}{x^۲}dx$

با جانشانی $\ln x=t$ و $x=e^t$ و $dx=e^t dt$ داریم:

$$\int\frac{\sin(\ln x)}{x^۲}dx=\int e^{-t}\sin t dt$$

با انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\int e^{-t}\sin t dt=-e^{-t}\cos t-\int e^{-t}\cos t dt \qquad \begin{matrix} u=e^{-t} & du=-e^{-t}\\ dv=\sin t dt & v=-\cos t\end{matrix}$$

باز با انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\int e^{-t}\cos t dt=e^{-t}\sin t+\int e^{-t}\sin t dt \qquad \begin{matrix} u=e^{-t} & du=-e^{-t}\\ dv=\cos t dt & v=\sin t\end{matrix}$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$\int e^{-t}\sin t dt=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t-\int e^{-t}\sin t dt$$

یا :

$$\int e^{-t}\sin t dt=-\frac{e^{-t}(\sin t+\cos t)}{۲}+C$$

و بنابراین با توجه به اینکه $t=\ln x$ خواهیم داشت :

$$\int\frac{\sin(\ln x)}{x^۲}dx=-\frac{\sin\ln x+\cos\ln x}{۲x}+C$$

پ- $\int\frac{\sqrt{۹-x^۲}}{x^۲}dx$

با $x=۳\sin\theta$ و $dx=۳\cos\theta d\theta$ داریم:

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{۹-x^۲}}{x^۲}dx &= \int\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}d\theta=\int\cot^۲\theta d\theta=\int(\csc^۲\theta-۱)d\theta\\ &= -\cot\theta-\theta+C\end{aligned}$$

و با توجه به اینکه:

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

خواهیم داشت:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{3} + C$$

۵- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی های $y=e^x$ و $y=e^{-x}$ و محور x ها و خطوط $x=\pm\ln 2$ حول محور y ها چیست؟

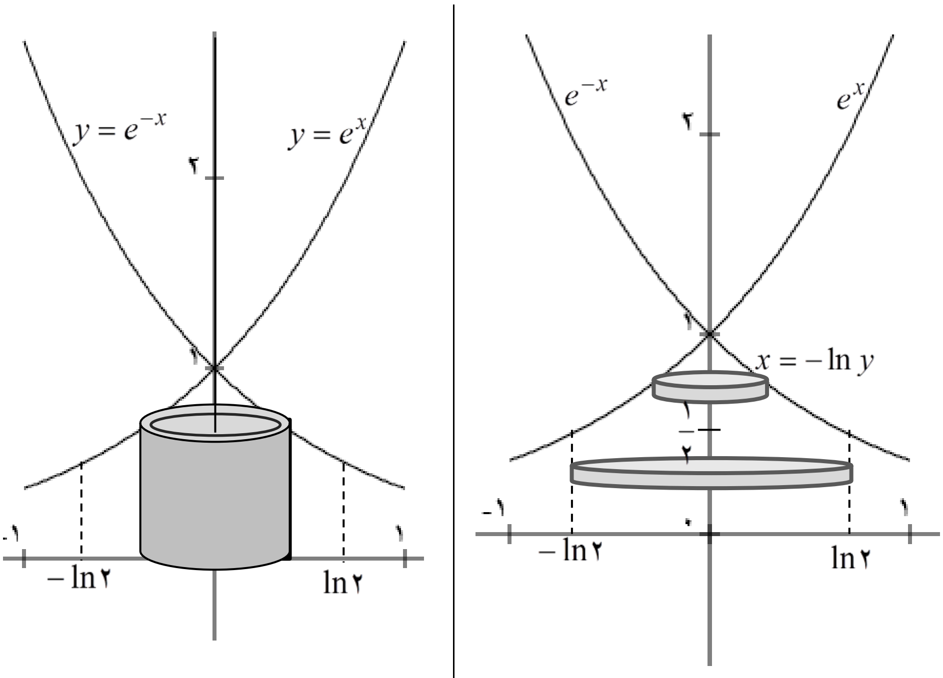
روش پوسته: با توجه به تقارن ناحیه کافی است یک نیمه از ناحیه مورد نظر(نیمه محصور بین منحنی $y=e^{-x}$ و خط $x=0$ و محور xها) را حول محور y ها بچرخانیم (ارتفاع مستطیل تقریب ساز برابر با e^{-x} و شعاع پوسته برابر با x است):

$$V = \int_0^{\ln 2} 2\pi x e^{-x} dx$$

با بهره گیری از انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$V = -2\pi e^{-x}(1+x)\Big|_0^{\ln 2} = -2\pi\left(\frac{1+\ln 2}{2} - 1\right) = \pi(1-\ln 2)$$

نمودار عناصر تقریب ساز برای مساله ۵



روش پوسته

روش واشر

روش دیسک: بازهم یک نیمه از ناحیه مورد نظر را حول محور y ها می چرخانیم (نیمه محصور بین منحنی $y=e^{-x}$ و خط $x=0$ و محور xها) در اینجا بایستی دو انتگرال را حساب کنیم:

$$V=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\pi(\ln 2)^2\,dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi(-\ln y)^2\,dy$$

با توجه به اینکه :

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}}(\ln 2)^2\,dy=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

و با جانشانی $t=\ln y$ و $y=e^t$ و $dy=e^t dt$ خواهیم داشت:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-\ln y)^2\,dy=\int_{-\ln 2}^{0}t^2e^t\,dt$$

و سپس با انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int_{-\ln 2}^{0}t^2e^t\,dt &= t^2e^t\Big|_{-\ln 2}^{0}-2\int_{-\ln 2}^{0}te^t\,dt\\ &=\frac{1}{2}(\ln 2)^2-2te^t\Big|_{-\ln 2}^{0}+2\int_{-\ln 2}^{0}e^t\,dt\\ &=\frac{1}{2}(\ln 2)^2+\ln 2+2e^t\Big|_{-\ln 2}^{0}\\ &=\frac{1}{2}(\ln 2)^2+\ln 2+1\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|ll}u=t^2 & du=2t\,dt\\ dv=e^t dt & v=e^t\\ u=t & du=dt\\ dv=e^t dt & v=e^t\end{array}$$

و بنابراین با جایــگذاری مقادیر به دست آمده و محاسبه حاصل جمع خواهیم داشت:

$$V=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\pi(\ln 2)^2\,dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi(-\ln y)^2\,dy=\pi(1-\ln 2)$$

۶- همگرایی یا واگرایی سری و انتگرال زیر را بررسی کنید:

الف- $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$

با بهره گیری از آزمون مقایسه حدی داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^{-p}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^{x^2}}=0$$

و با توجه به اینکه حد فوق به ازای هر مقدار p مثلا $p=2$ صفر است و $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ همگراست ، بنابراین انتگرال داده شده همگراست.

ب- $\sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{n+۱}{\sqrt{n^۳+۲n+۴}}$

باز با بهره گیری از آزمون مقایسه حدی داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+۱}{\sqrt{n^۳+۲n+۴}}}{\frac{۱}{n^p}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{p+۱}+n^p}{\sqrt{n^۳+۲n+۴}}\overset{p=\frac{۱}{۲}}{=}۱$$

و بنابراین سری فوق رفتاری مشابه سری $\sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{۱}{\sqrt{n}}$ دارد و واگراست.

۷- بازه همگرایی سری مقابل را بیابید: $\sum_{n=۰}^{+\infty}\left(\frac{x^۲+۳}{۴}\right)^n$

با بهره گیری از آزمون ریشه داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{x^۲+۳}{۴}\right)^n}=\frac{x^۲+۳}{۴}$$

برای اینکه حد فوق کوچکتر از ۱ باشد بایستی داشته باشیم:

$$\frac{x^۲+۳}{۴}<۱\quad\Rightarrow x^۲<۱\quad -۱<x<۱$$

پس بازه همگرایی $-۱<x<۱$ است. در مورد نقاط $x=\pm۱$ سری به شکل $\sum_{n=۰}^{+\infty}۱$ در می آید که به وضوح واگراست.

۸- با استفاده از بسط تیلور $f(x)=\frac{x}{۱+x^۲}$ حول $a=۰$ مطلوب است $f^{(۱۰)}(۰)$.

به ازای $|x|<۱$ داریم:

$$\frac{۱}{۱+x^۲}=۱-x^۲+x^۴-x^۶+\cdots=\sum_{n=۰}^{+\infty}(-۱)^n x^{۲n}$$

و بنابراین:

$$f(x)=\frac{x}{۱+x^۲}=\sum_{n=۰}^{+\infty}(-۱)^n x^{۲n+۱}$$

از سوی دیگر با توجه به اینکه $f(x)$ تابعی بی نهایت بار به طور پیوسته مشتق پذیر است داریم:

$$f(x)=f(۰)+\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(۰)}{n!}x^n$$

با مقایسه این دو سری و برابر قرار دادن ضرایب $x^{۱۰}$ در دو سری در می یابیم که :

$$\frac{f^{(۱۰)}(۰)}{۱۰!}=۰\quad\Rightarrow f^{(۱۰)}(۰)=۰$$

۹- منحنی قطبی $r=\sin ۴\theta$ را در فاصله $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۴}$ رسم کنید.

نمودار نسبت به محور y ها متقارن است:

$$\sin ۴\theta=-\sin[۴(-\theta)]$$

نمودار نسبت به محور قطبی متقارن است:

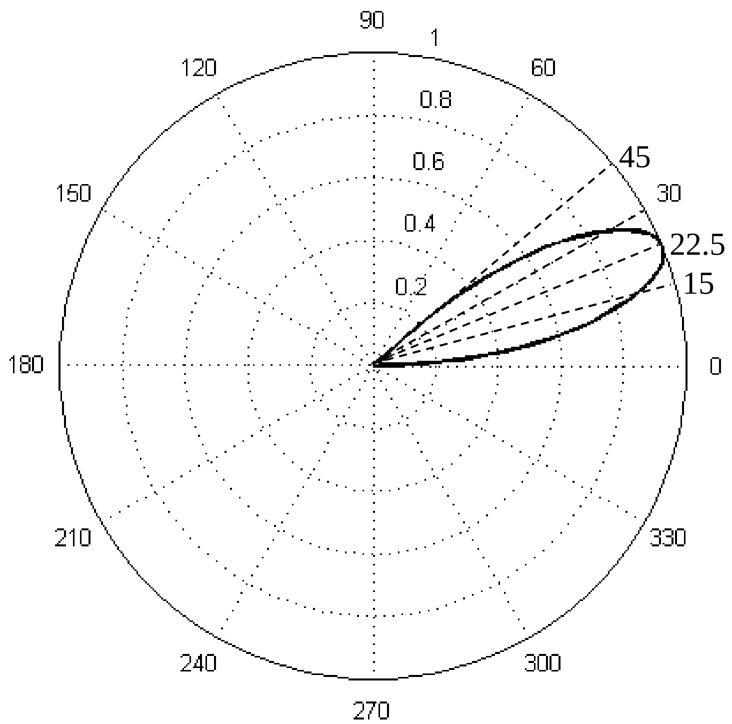
$$\sin ۴\theta=-\sin[۴(\pi-\theta)]$$

نمودار نسبت به قطب متقارن است:

$$\sin ۴\theta=\sin[۴(\pi+\theta)]$$

برای رسم نمودار در فاصله $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۴}$ مقادیر r را به ازای θ های معین محاسبه می کنیم و نمودار را رسم می کنیم:

θ	۰	$\frac{\pi}{۱۲}=۱۵^\circ$	$\frac{\pi}{۸}=۲۲/۵^\circ$	$\frac{\pi}{۶}=۳۰^\circ$	$\frac{\pi}{۴}=۴۵^\circ$
$r=\sin ۴\theta$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۰



مساله ۹: نمودار $r=\sin ۴\theta$ در بازه $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۴}$

۱- جواب های معادله $z^2+2z-4i-2=0$ را به دست آورید.

داریم:

$$\Delta' = 1+4i+2 = 3+4i$$

اگر $c=x+iy$ یک ریشه دوم Δ' باشد، داریم: $c^2 = x^2-y^2+2ixy$ و با توجه به این امر ریشه هـای دوم Δ' را می یابیم:

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=2, y=1 \\ x=-2, y=-1 \end{array}$$

بنابراین جواب های معادله $z^2+2z-4i-2=0$ به شکل زیر به دست می آیند:

$$z_1 = -1+2+i = 1+i \qquad z_3 = -1+(-2-i) = -3-i$$
$$z_2 = -1-(2+i) = -3-i \quad z_4 = -1-(-2-i) = 1+i$$

که دو به دو یکسانند و در نتیجه جواب های معادله عبارتند از $-3-i$ و $1+i$.

۲- حدود زیر را محاسبه کنید:

الف: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{1}{n}+2\cos\frac{2}{n}+3\cos\frac{3}{n}+\cdots\cdots+n\cos\frac{n}{n}\right)$

حد را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cos\frac{i}{n} = \int_0^1 x\cos x dx$$

که با بهره گیری از انتگرال گیری جزء به جزء ($u=x$ و $dv=\cos x dx$) داریم:

$$\int_0^1 x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin x dx = \sin 1 + \cos x\Big|_0^1 = \sin 1+\cos 1 - 1$$

ب: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)^{(\tan\frac{x}{2}-1)}$

باتوجه به مثبت بودن $1-\sin x$ در همسایگی سفته از $x=\frac{\pi}{2}$ قرار می دهیم:

$$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)^{(\tan\frac{x}{2}-1)}$$

و $\ln A$ را در صورت وجود حساب می کنیم:

$$\ln A = \ln \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)^{(\tan\frac{x}{2}-1)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln(1-\sin x)^{(\tan\frac{x}{2}-1)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan\frac{x}{2}-1)\ln(1-\sin x)$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1-\sin x)}{\frac{1}{(\tan\frac{x}{2}-1)}}$$

اکنون با توجه به نامتناهی شدن صورت و مخرج از قاعده هوپیتال بهره می گیریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1-\sin x)}{\frac{1}{(\tan\frac{x}{2}-1)}} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{-\cos x}{1-\sin x}}{\frac{-\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{(\tan\frac{x}{2}-1)^2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(\tan\frac{x}{2}-1)^2}{1-\sin x}$$

$$\overset{HOP}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x(\tan\frac{x}{2}-1)^2+\sec^2\frac{x}{2}\cos x(\tan\frac{x}{2}-1)}{-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan\frac{x}{2}-1)^2}{\cos x} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\frac{x}{2}(\tan\frac{x}{2}-1)}{-\sin x} = 0$$

و به این ترتیب داریم:

$$A = e^{0} = 1$$

۳- ثابت کنید:

$$(x \ge 0) \qquad Arc\tan x^4 \le 2x^4$$

رابطه به ازای $x=0$ برقرار است . اگر $x>0$ با بهره گیری از قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته کوشی به ازای عدد $0<c<x$ داریم:

$$\frac{Arc\tan x^4 - Arc\tan 0^4}{x^4-0^4} = \frac{\frac{4c^3}{1+c^8}}{4c^3} = \frac{1}{1+c^8} < 1 \Rightarrow Arc\tan x^4 < x^4 < 2x^4$$

۴- انتگرال های زیر را حل کنید.

الف: $\int \frac{2x-1}{x^3-2x^2+4x-3}dx$

با توجه به اینکه داریم:

$$\int \frac{2x-1}{x^3-2x^2+4x-3}dx = \int \frac{2x-1}{(x-1)(x^2-x+3)}dx$$

از روش کسرهای جزیی بهره می گیریم:

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x^2-x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+3} = \frac{(A+B)x^2+(-A-B+C)x+3A-C}{(x-1)(x^2-x+3)}$$

و دستگاه مربوطه را حل می کنیم:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A-B+C=2 \Rightarrow C=2, A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3} \\ 3A-C=-1 \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int \frac{2x-1}{x^3-2x^2+4x-3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-6}{x^2-x+3}dx$$

نخستین انتگرال به سادگی حل می شود:

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{3}\ln|x-1|$$

برای محاسبه انتگرال دوم آن را به شکل زیر تجزیه می کنیم:

$$\int \frac{x-6}{x^2-x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+3}dx - \frac{11}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+3}$$

و بنابراین:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+3}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-x+3|$$

حال به محاسبه $\int \frac{dx}{x^2-x+3}$ می پردازیم:

$$\int \frac{dx}{x^2-x+3} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}$$

با جانشانی $x-\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{11}}{2}\tan\theta$ یا $\tan\theta = \frac{2x-1}{\sqrt{11}}$ و $dx = \frac{\sqrt{11}}{2}\sec^2\theta d\theta$ خواهیم داشت:

$$\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\frac{11}{4}\tan^2\theta+\frac{11}{4}} = \frac{2}{\sqrt{11}}\int d\theta = \frac{2}{\sqrt{11}}\theta = \frac{2}{\sqrt{11}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{11}}\right)$$

بنابراین:

$$\int \frac{2x-1x^3}{x^3-2x^2+4x-3}dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+3| + \frac{\sqrt{11}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{11}}\right)+C$$

ب: $\int \log_2 x^{\ln 2}dx$

$$\int \log_2 x^{\ln 2}dx = \ln 2\int \log_2 xdx = \ln 2\int \frac{\ln x}{\ln 2}dx = \int \ln xdx$$

با انتگرال گیری جزء به جزء ($u=\ln x$ و $dv=dx$) داریم:

$$\int \ln xdx = x\ln x - \int dx = x(\ln x-1)+C$$

ج: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx$

با جانشانی $t=\frac{\pi}{2}-x$ و $dx=-dt$ خواهیم داشت:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{3} x}{\cos^{3} x+\sin^{3} x} dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sin^{3}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\cos^{3}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin^{3}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^{3} t}{\sin^{3} t+\cos^{3} t} dt$$

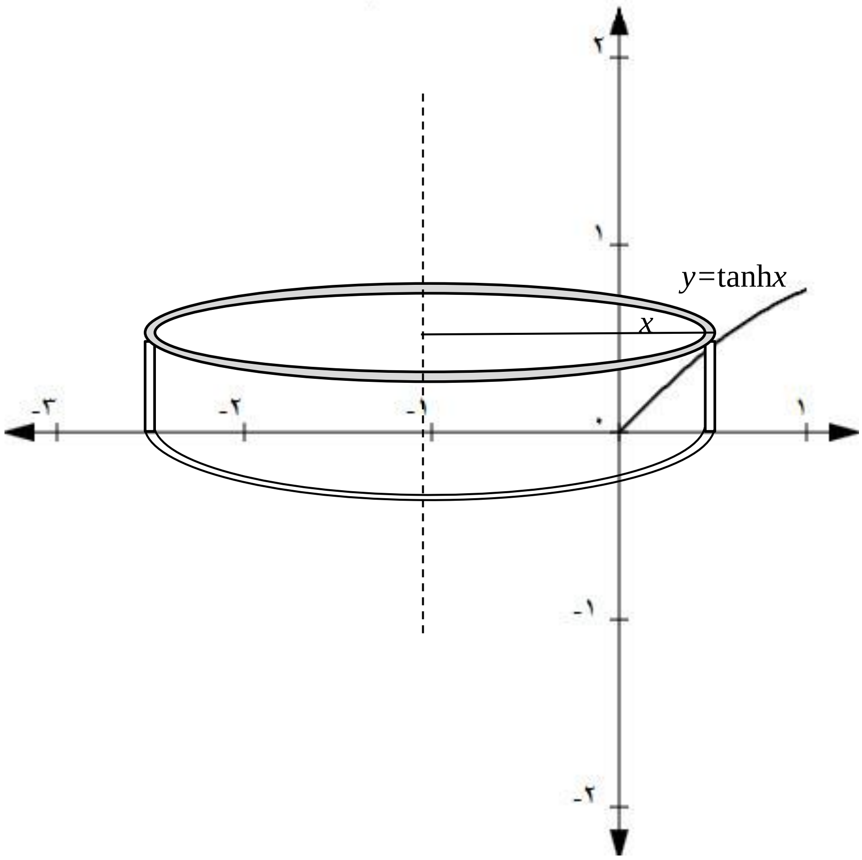
با توجه به ظاهری بودن متغیر انتگرال گیری معین و با جمع دو انتگرال در دو طرف راست و چپ خواهیم داشت:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{3} x}{\cos^{3} x+\sin^{3} x} dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^{3} x}{\sin^{3} x+\cos^{3} x} dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2}$$

با توجه به تساوی دو انتگرال ، مقدار انتگرال مطلوب $\frac{\pi}{4}$ به دست می آید.

۵–حجم حاصل از دوران ناحیه بین منحنی $y=\tanh x$ و محور طول ها از $x=0$ تا $x=\ln 2$ را حول خط $x=-1$ بیابید.

اگر روش پوسته را به کارگیریم:



$$V=2\pi\int_{0}^{\ln 2}(1+x)\tanh x dx=2\pi\int_{0}^{\ln 2}\tanh x dx+2\pi\int_{0}^{\ln 2} x\tanh x dx$$

داریم :

$$\int_{0}^{\ln 2}\tanh x dx=\int_{0}^{\ln 2}\frac{\sinh x}{\cosh x} dx=\ln\cosh x\Big|_{0}^{\ln 2}=\ln\cosh\ln 2-\ln\cosh 0=\ln\frac{5}{4}$$

پس خواهیم داشت:

$$V=2\pi\ln\frac{5}{4}+2\pi\int_0^{\ln 2}x\tanh x\,dx$$

--- اگر روش واشر را به کار گیریم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{\frac{3}{5}}\left[(1+\ln 2)^2-(1+\tanh^{-1}y)^2\right]dy=\pi\int_0^{\frac{3}{5}}\left[(\ln 2)^2+2\ln 2-2\tanh^{-1}y-(\tanh^{-1}y)^2\right]dy\\&=\pi\left(\frac{3(\ln 2)^2}{5}+\frac{3\ln 4}{5}\right)-\pi\int_0^{\frac{3}{5}}\left[2\tanh^{-1}y+(\tanh^{-1}y)^2\right]dy\end{aligned}$$

با جانشانی $y=\tanh x$ و $dy=\operatorname{sech}^2x\,dx$ خواهیم داشت:

$$\int_0^{\frac{3}{5}}\left[2\tanh^{-1}y+(\tanh^{-1}y)^2\right]dy=\int_0^{\ln 2}(2x+x^2)\operatorname{sech}^2x\,dx$$

با بهره گیری از انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\int_0^{\ln 2}x\operatorname{sech}^2x\,dx=x\tanh x\Big|_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}\tanh x\,dx=\frac{3\ln 2}{5}-\ln\cosh x\Big|_0^{\ln 2}=\frac{3\ln 2}{5}-\ln\frac{5}{4}$$

$$\int_0^{\ln 2}x^2\operatorname{sech}^2x\,dx=x^2\tanh x\Big|_0^{\ln 2}-2\int_0^{\ln 2}x\tanh x\,dx=\frac{3(\ln 2)^2}{5}-2\int_0^{\ln 2}x\tanh x\,dx$$

و بنابراین:

$$\int_0^{\ln 2}(2x+x^2)\operatorname{sech}^2x\,dx=\frac{6\ln 2}{5}-2\ln\frac{5}{4}+\frac{3(\ln 2)^2}{5}-2\int_0^{\ln 2}x\tanh x\,dx$$

و بالاخره با جایگذاری در رابطه اصلی به دست می آوریم:

$$V=\pi\ln\frac{5}{4}+2\pi\int_0^{\ln 2}x\tanh x\,dx$$

پس در هر صورت بایستی $\int_0^{\ln 2}x\tanh x\,dx$ را حساب کنیم. این انتگرال در انتهای پاسخ به سوالات محاسبه شده است.

۶-همگرایی یا واگرایی سری و انتگرال ناسره زیر را بررسی کنید:

الف- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times 3\times 5\times 7\times\cdots\cdots\times(2n-1)}{2^{2n}n!}$

با بهره گیری از آزمون نسبت داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1\times 3\times 5\times 7\times\cdots\cdots\times(2n-1)(2n+1)}{2^{2n+2}(n+1)!}}{\dfrac{1\times 3\times 5\times 7\times\cdots\cdots\times(2n-1)}{2^{2n}n!}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{4(n+1)}=\frac{1}{2}$$

یعنی سری همگراست.

ب- $\int_0^1 \frac{\ln x+x}{1+x^2}dx$

با توجه به اینکه انتگرالده $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$ بر بازه $[0,1]$ پیوسته است ، پس همگراست و می ماند بررسی همگرایی $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$. جانشانی $x=e^{-t}$ و $dx=-e^{-t}dt$ را اعمال می کنیم. خواهیم داشت:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}dt}{1+e^{-2t}}$$

با بهره گیری از آزمون مقایسه حدی داریم:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\dfrac{te^{-t}}{1+e^{-2t}}}{\dfrac{1}{t^p}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{p+1}}{e^t+e^{-t}}=0$$

با توجه به اینکه حدفوق به ازای هر عدد p به سمت صفر میل می کند ، به ازای $p=2$ هم به صفر میل می کند و بنابراین انتگرال همگراست. در نتیجه $\int_0^1 \frac{\ln x+x}{1+x^2}dx$ حاصل جمع دو انتگرال همگراست و خودش نیز همگراست.

۷-شعاع و فاصله همگرایی سری مقابل را تعیین کنید $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3+2n}{1+4n}\right)^{n^2}x^n$

با بهره گیری از آزمون ریشه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3+2n}{1+4n}\right)^{n^2}|x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+2n}{1+4n}\right)^n=|x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{4n+1}\right)\right)^n=0$$

و بنابراین بازه همگرایی سری، کل اعداد حقیقی است.

۸-الف: سری مک لوران تابع $f(x)=Arc\tan x^{2}$ را تعیین کنید.

به ازای $|x|<1$ داریم:

$$\frac{1}{1+x^{2}}=1-x^{2}+x^{4}-x^{6}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n}$$

و بنابراین به ازای $\left|x^{2}\right|<1$ خواهیم داشت:

$$Arc\tan x^{2}=\int_{0}^{x^{2}}\frac{2tdt}{1+t^{4}}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\int t^{4n+1}dt=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left.\frac{t^{4n+2}}{4n+2}\right|_{0}^{x^{2}}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{4n+2}}{4n+2}$$

و بنابراین:

$$Arc\tan x^{2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{4n+2}}{2n+1}$$

این سری به ازای $x<1$ همگراست. در $x=1$ سری به شکل زیر در می آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}$$

که یک سری متناوب با دنباله جملات نزولی است و همگرا. در $x=-1$ سری به شکل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ در می آید که هم ارز با سری همساز و واگراست. بنابراین بازه همگرایی سری به شکل $(-1,1]$ است و در این محدوده داریم:

$$Arc\tan x^{2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{4n+2}}{2n+1}\qquad -1<x\leq 1$$

به ازای $x>1$ با جانشانی $u=\frac{1}{x}<1$ خواهیم داشت:

$$Arc\tan x^{2}=Arc\tan\left(\frac{1}{u}\right)^{2}=\frac{\pi}{2}-Arc\tan u^{2}=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{u^{4n+2}}{2n+1}=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)x^{4n+2}}$$

------ می توانیم به طور مستقیم با بهره گیری از بسط مک لوران تابع $Arc\tan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ و جایگذاری x^{2} به جای x هم به فرمول بسط برسیم.

ب: مقدار سری $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\cdots\cdots$ را به دست آورید.

اگر سری را به شکل زیر بنویسیم:

$$\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}$$

به سادگی دیده می شود که سری های :

$$\frac{Arc\tan x^{2}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{4n+2}}{2n+1}\qquad \text{و}\qquad \frac{Arc\tan x}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

به ازای $x=1$ همان مقدار مجهول را دارند. یعنی حاصل جمع بالا برابر است با:

$$\frac{Arc\tan 1}{2}=\frac{\pi}{8}$$

محاسبه $\int_0^{\ln 2} x\tanh x dx$

با جانشانی $x=-\ln t$ $(t=e^{-x})$ و $dx=-\frac{dt}{t}$ و توجه بـه اینکـه $\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ خـواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} x\tanh x dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{t^2-1}{(t^2+1)}\frac{\ln t}{t}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{(t^2+1)t}\right)\ln t dt\\ &=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln t}{t}dt-2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{t\ln t}{t^2+1}dt=\frac{(\ln t)^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}-2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{t\ln t}{t^2+1}dt\\ &=-\frac{(\ln 2)^2}{2}-2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{t\ln t}{t^2+1}dt\end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{t\ln t}{t^2+1}dt$ از روش جزء به جزء بهره می گیریم. ($u=\ln t$ و $dv=\frac{2tdt}{t^2+1}$):

$$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{t\ln t}{t^2+1}dt=\ln(1+t^2)\ln t\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln(1+t^2)}{t}dt=\ln\frac{5}{4}\ln 2-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln(1+t^2)}{t}dt$$

برای حل $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln(1+t^2)}{t}dt$ ، از بسط تابع $\ln(1+t^2)$ بهره می گیریم:

$$\ln(1+t^2)=t^2-\frac{t^4}{2}+\frac{t^6}{3}-\frac{t^8}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^{2n}}{n}$$

و در نتیجه:

$$\frac{\ln(1+t^2)}{t}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^{2n-1}}{n}$$

و به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln(1+t^2)}{t}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{2n-1}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n^2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

به این ترتیب :

$$\int_{0}^{\ln 2} x\tanh x dx = -\frac{(\ln 2)^2}{2} - 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t\ln t}{t^2+1}dt$$
$$= -\frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln\frac{5}{4}\ln 2 + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(1+t^2)}{t}dt$$
$$= -\frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln\frac{5}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

می توان نشان داد که $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ و در نتیجه:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

همچنین تابع *Dilgarithm* را به ازای $|x|<1$ بـه شـکل $Li_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$ تعریـف مـی کنند، با توجه به نکات اخیر می توانیم مقدار انتگرال را به شکل زیر بنویسیم:

$$\int_{0}^{\ln 2} x\tanh x dx = -\frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln\frac{5}{4}\ln 2 + \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{2}Li_2\left(-\frac{1}{4}\right)$$

تمرین: اگر بدانیم:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

نشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

راهنمایی: $\left(\frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\times\frac{\pi^2}{6}\right)$

تمرین: اگر تعریف کنیم:

(تابع پولی لگاریتم از مرتبه m):

$$Li_m(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^m}$$

بازه همگرایی سری را به ازای m بیابید و نشان دهید:

$$\frac{d}{dx}Li_m(x) = \frac{1}{x}Li_{m-1}(x)$$

۱- جواب های معادله $z^{۴}=\left(\frac{۱+i}{۱-i}\right)^{۳}$ را به دست آورید.

با توجه به اینکه:

$$۱+i=\sqrt{۲}e^{i\frac{\pi}{۴}} \qquad \text{و} \qquad ۱-i=\sqrt{۲}e^{-i\frac{\pi}{۴}}$$

داریم:

$$\left(\frac{۱+i}{۱-i}\right)^{۳}=\left(\frac{\sqrt{۲}e^{i\frac{\pi}{۴}}}{\sqrt{۲}e^{-i\frac{\pi}{۴}}}\right)^{۳}=e^{i\frac{۳\pi}{۲}}$$

و در نتیجه جواب های معادله داده شده ، ریشه های چهارم عدد $e^{i\frac{۳\pi}{۲}}=-i$ است:

$$c_k=e^{i\frac{۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}}{۴}} \qquad k=۰,۱,۲,۳$$

که اعداد $e^{i\frac{۳\pi}{۸}}$ و $e^{i\frac{۷\pi}{۸}}$ و $e^{i\frac{۱۱\pi}{۸}}$ و $e^{i\frac{۱۵\pi}{۸}}$ خواهند بود.

برای تعیین مقدار سمت راست معادله می توانستیم از محاسبات زیر نیز بهره بگیریم:

$$\left(\frac{۱+i}{۱-i}\right)^{۳}=\left(\frac{(۱+i)(۱+i)}{۲}\right)^{۳}=i^{۳}=-i$$

۲- تابع $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ را در نظر گرفته با استفاده از قضیه مقدار میانگین در فاصله مناسب ، نشان دهید از عدد e^{π} و π^{e} کدامیک بزرگتر است.

با بهره گیری از قضیه مقدار میانگین و با توجه به اینکه $f'(x)=\frac{۱-\ln x}{x^{۲}}$ ، به ازای عددی مثـل $e<c<\pi$ داریم:

$$\frac{f(\pi)-f(e)}{\pi-e}=\frac{\frac{\ln\pi}{\pi}-\frac{\ln e}{e}}{\pi-e}=\frac{e\ln\pi-\pi\ln e}{\pi e(\pi-e)}=\frac{\ln\pi^{e}-\ln e^{\pi}}{\pi e(\pi-e)}$$
$$=\frac{۱}{\pi e(\pi-e)}\ln\left(\frac{\pi^{e}}{e^{\pi}}\right)=f'(c)=\frac{۱-\ln c}{c^{۲}}$$

اما داریم:

$$۰<e<c<\pi\Rightarrow\begin{cases}۱-\ln\pi<۱-\ln c<۱-\ln e=۰\\ ۰<\frac{۱}{\pi}<\frac{۱}{c}<\frac{۱}{e}\end{cases}\Rightarrow\frac{۱-\ln c}{c^{۲}}<۰$$

و در نتیجه:

$$\frac{۱}{\pi e(\pi-e)}\ln\left(\frac{\pi^{e}}{e^{\pi}}\right)=\frac{۱-\ln c}{c^{۲}}<۰\Rightarrow\left(\frac{\pi^{e}}{e^{\pi}}\right)<۱\Rightarrow\pi^{e}<e^{\pi}$$

۳- هریک ازحدهای زیر را حساب کنید:

الف- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2+3x}{4+3x}\right)^{\frac{3x}{2}}$

روش ۱–با بهره گیری از فرمول $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to\infty}}(1+\alpha)^{\beta}=e^{\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to\infty}}\alpha\beta}$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+3x}{4+3x}\right)^{\frac{3x}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{4+3x}\right)^{\frac{3x}{2}}=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{4+3x}\times\frac{3x}{2}}=e^{-1}$$

روش ۲– می توانیم با بهره گیری از لگاریتم گیری و سپس استفاده از قاعده هوپیتال هم به جـواب برسـیم.

اگر $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2+3x}{4+3x}\right)^{\frac{3x}{2}}$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}\ln A&=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+3x}{4+3x}\right)^{\frac{3x}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2+3x}{4+3x}\right)^{\frac{3x}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2}\ln\left(\frac{2+3x}{4+3x}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+3x)-\ln(4+3x)}{\frac{2}{3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{2+3x}-\frac{3}{4+3x}}{-\frac{2}{3x^2}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{6}{(2+3x)(4+3x)}}{-\frac{2}{3x^2}}=-9\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{9x^2+18x+8}=-1\end{aligned}$$

ب- $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$

روش ۱–

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)&=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\ln\frac{3}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right]\\&=\int_0^1\ln x\,dx\end{aligned}$$

و بالاخره با انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\int_0^1\ln x\,dx=x\ln x\Big|_{\to 0^+}^{1}-\int_0^1 dx=-1$$

روش ۲–با استفاده ازفرمول استرلینگ به ازای n های بزرگ داریم:

$$n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=\frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}n\sqrt[n]{2\pi n}$$

و بنابراین:

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)=\ln\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)=\ln\frac{۱}{e}\lim_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt[n]{۲\pi n}}{n}=\ln\frac{۱}{e}=-۱$$

۴- انتگرال های نامعین و معین زیر را حساب کنید.

الف: $\int\frac{x^۳}{(۱+x^۲)\sqrt{۱+x^۲}}dx$

روش ۱- با $۱+x^۲=t$ و $xdx=\frac{dt}{۲}$ داریم:

$$\int\frac{x^۳}{(۱+x^۲)\sqrt{۱+x^۲}}dx=\frac{۱}{۲}\int\frac{t-۱}{t\sqrt{t}}dt=\frac{۱}{۲}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}-\frac{۱}{۲}\int\frac{dt}{t\sqrt{t}}=\sqrt{t}+\frac{۱}{\sqrt{t}}+C$$
$$=\sqrt{۱+x^۲}+\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}+C$$

روش ۲- با جانشانی $x=\sinh\theta$ و $dx=\cosh\theta d\theta$ داریم:

$$\int\frac{x^۳}{(۱+x^۲)\sqrt{۱+x^۲}}dx=\int\frac{\sinh^۳\theta\cosh\theta}{\cosh^۳\theta}d\theta=\int\frac{(\cosh^۲\theta-۱)\sinh\theta}{\cosh^۲\theta}d\theta=\cosh\theta+\sec h\theta+C$$
$$=\sqrt{۱+x^۲}+\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}+C$$

--- با جانشانی $x=\tan\theta$ هم انتگرال به راحتی حل می شود امتحان کنید.

ب: $\int\frac{۳۰}{x^۳-۲x^۲-۵x+۶}dx$

از تبدیل انتگرالده به کسرهای جزیی بهره می گیریم:

$$\frac{۳۰}{x^۳-۲x^۲-۵x+۶}=\frac{۳۰}{(x-۱)(x^۲-x+۶)}=\frac{A}{x-۱}+\frac{Bx+C}{x^۲-x+۶}$$
$$=\frac{(A+B)x^۲-(A+B+C)x+۶A-C}{(x-۱)(x^۲-x+۶)}$$

پس به دستگاه زیر می رسیم:

$$\begin{cases}A+B=۰\\A+B+C=۰\Rightarrow C=۰,A=۵,B=-۵\\۶A-C=۳۰\end{cases}$$

و به این ترتیب:

$$\int\frac{۳۰}{x^۳-۲x^۲-۵x+۶}dx=۵\int\frac{dx}{x-۱}-۵\int\frac{x}{x^۲-x+۶}dx$$
$$=۵\ln|x-۱|-\frac{۵}{۲}\ln\left|x^۲-x+۶\right|+۵\sqrt{\frac{۶}{۲۳}}\tan^{-۱}\left(\sqrt{\frac{۲۳}{۲۴}}\left(x-\frac{۱}{۲}\right)\right)+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-۱}{\sqrt{x^۲-x+۶}}\right|^۵+۵\sqrt{\frac{۶}{۲۳}}\tan^{-۱}\left(\sqrt{\frac{۲۳}{۲۴}}\left(x-\frac{۱}{۲}\right)\right)+C$$

که انتگرال دوم را به شکل زیر محاسبه کرده ایم:

$$\int \frac{x}{x^۲-x+۶}dx = \frac{۱}{۲}\int \frac{۲x-۱}{x^۲-x+۶}dx+\frac{۱}{۲}\int \frac{dx}{x^۲-x+۶}=\frac{۱}{۲}\ln\left|x^۲-x+۶\right|+\frac{۱}{۲}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۲۳}{۲۴}}$$

$$=\frac{۱}{۲}\ln\left|x^۲-x+۶\right|+\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۲۴}{۲۳}}\tan^{-۱}\left(\sqrt{\frac{۲۳}{۲۴}}\left(x-\frac{۱}{۲}\right)\right)$$

پ: $\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{\sin ۲x}}{\sqrt{\sin ۲x}+\sqrt{\cos ۲x}}dx$

با $۲x=t$ خواهیم داشت:

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{\sin ۲x}}{\sqrt{\sin ۲x}+\sqrt{\cos ۲x}}dx=\frac{۱}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\sin t}+\sqrt{\cos t}}dt$$

از سوی دیگر با جانشانی $t=\frac{\pi}{۲}-u$ و توجه به اینکه $\sin\left(\frac{\pi}{۲}-u\right)=\cos u$ و $\cos\left(\frac{\pi}{۲}-u\right)=\sin u$ خواهیم داشت:

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\sin t}+\sqrt{\cos t}}dt=-\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰} \frac{\sqrt{\cos u}}{\sqrt{\cos u}+\sqrt{\sin u}}du=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sqrt{\cos u}}{\sqrt{\cos u}+\sqrt{\sin u}}du$$

پس خواهیم داشت:

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\sin t}+\sqrt{\cos t}}dt=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\cos t}+\sqrt{\sin t}}du$$

و با توجه به اینکه:

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\sin t}+\sqrt{\cos t}}dt+\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\cos t}+\sqrt{\sin t}}du=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} du=\frac{\pi}{۲}$$

به این نتیجه می رسیم که :

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{\sin ۲x}}{\sqrt{\sin ۲x}+\sqrt{\cos ۲x}}dx=\frac{۱}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\sin t}+\sqrt{\cos t}}dt=\frac{۱}{۲}\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۸}$$

۵–حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی های $y=e^x$ و $y=e^{-x}$ و محور x ها و خطوط $x=\pm\ln ۲$ را حول محور y ها به دست آورید.

روش غشاء :

$$\int_۰^{\ln ۲} ۲\pi x e^{-x}dx=-۲\pi(x+۱)e^{-x}\Big|_۰^{\ln ۲}=\pi(۱-\ln ۲)$$

روش دیسک:

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}}\pi(\ln 2)^2 dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi(\ln y)^2 dy=\frac{\pi}{2}(\ln 2)^2+\pi\left(-\frac{(\ln 2)^2}{2}-\ln 2+1\right)=\pi(1-\ln 2)$$

که مراحل حل انتگرال $\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\ln y)^2 dy$ در زیر آمده است. در حل انتگرال $\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\ln y)^2 dy$ برای بهره گیری از روش جزء به جزء قرار می دهیم:

$$u=(\ln y)^2 \quad du=2\frac{\ln y}{y}dy$$
$$v=y \qquad dv=dy$$

و بنابراین:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\ln y)^2 dy=y(\ln y)^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln y dy=-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}\right)^2-2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln y dy$$

بازهم قرار می دهیم:

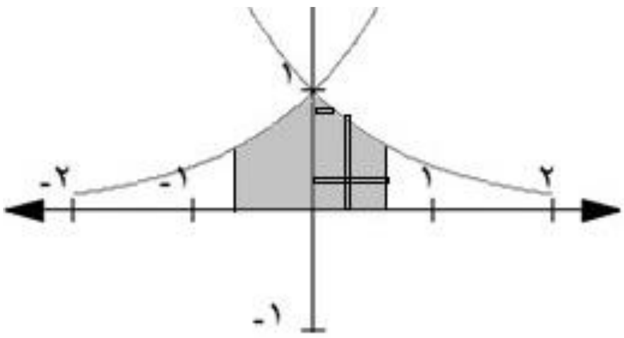
$$u=\ln y \quad du=\frac{dy}{y}$$
$$v=y \qquad dv=dy$$

و در نتیجه:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln y dy=y\ln y\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}$$

و به این ترتیب :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\ln y)^2 dy=-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{(\ln 2)^2}{2}-\ln 2+1$$



۶-همگرایی - واگرایی سری و انتگرال ناسره زیر را بررسی کنید:

الف- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\times 3\times 5\times 7\times\cdots\cdots\times(2n-1)}{n!2^{2n}}$

با بهره گیری از آزمون نسبت داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1\times3\times5\times7\times\cdots\cdots\times(2n-1)(2n+1)}{(n+1)!2^{2n+2}}}{\dfrac{1\times3\times5\times7\times\cdots\cdots\times(2n-1)}{n!2^{2n}}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{4(n+1)}=\frac{1}{2}$$

یعنی سری همگراست.

ب- $\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx$

با جانشانی $\ln x=-t$ و $x=e^{-t}$ و $dx=-e^{-t}dt$ انتگرال به شکل زیر در می آید:

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx=-\int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}}{1+e^{-2t}}dt=-\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t+e^{-t}}dt$$

حال برای $\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t+e^{-t}}dt$ که یک انتگرال با انتگرالده نامنفی است از آزمون مقایسه حدی بهره می گیریم:

$$\lim_{t\to+\infty}t^p\frac{t}{e^t+e^{-t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{p+1}}{e^t+e^{-t}}$$

با توجه به اینکه حد فوق به ازای هر عدد p به سمت صفر میل می کند، به ازای $p=2$ هم بـه سـمت صـفر میل کرده و در نتیجه انتگرال همگراست.

۷-شعاع و فاصله همگرایی سری توانی $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n n}x^n$ را تعیین کنید.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{\ln(n+1)}{2^{n+1}(n+1)}x^{n+1}}{\dfrac{\ln n}{2^n n}x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\frac{|x|}{2}$$

برای اینکه سری همگرا باشد، بایستی $\frac{|x|}{2}<1$ یا :

$$-2<x<2$$

در $x=-2$ سری به شکل زیر در می آید:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n n}(-2)^n=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$$

که یک سری متناوب با دنباله جملات نزولی و همگراست. در $x=2$ سری به شکل زیر در می آید:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n n}(2)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$$

که با توجه به اینکه به ازای $n>e$ داریم $\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$ بنابر آزمون مقایسه ، سـری واگراسـت . بنـابراین بـازه همگرایی سری به شکل $-2\le x<2$ خواهد بود.

۸-الف: با استفاده از سری هندسی ، سری مک لورین تابع $f(x)=\dfrac{x}{(2+x^2)^2}$ را بنویسید.

اگر $|x|<1$ آنگاه داریم:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

بنابراین اگر $|x|<\sqrt{2}$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2+x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^{2n}$$

از سوی دیگر:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2+x^2}=-\frac{2x}{(2+x^2)^2}=-2f(x)$$

و بنابراین اگر $|x|<\sqrt{2}$ آنگاه :

$$\begin{aligned} f(x) &=-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{2+x^2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^{2n}\right)=-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^{n-1}}x^{2n-1}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}x^{2n+1}=\frac{x}{4}-\frac{2x^3}{8}+\frac{3x^5}{16}-\frac{4x^7}{32}+\cdots \end{aligned}$$

ب: حاصل سری عددی $\frac{1}{4}-\frac{2}{8}+\frac{3}{16}-\frac{4}{32}+\frac{5}{64}-\cdots\cdots$ را بیابید.

سری عددی داده شده همان سری به دست آمده در قسمت الف برای تابع $f(x)=\dfrac{x}{(2+x^2)^2}$ به ازای $x=1$ است و بنابراین مقدار سری عددی فوق ، برابر با $f(1)=\frac{1}{9}$ است.

۱- عدد z را چنان بیابید که داشته باشیم $z^{۲}-\bar{z}^{۲}=۴i$ و $\mathrm{Re}(z)=-۲\,\mathrm{Im}(\bar{z})$.

$$z^{۲}-\bar{z}^{۲}=(z-\bar{z})(z+\bar{z})=۲i\,\mathrm{Im}(z)\times ۲\,\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z)i\times ۲\,\mathrm{Re}(z)=۲[\mathrm{Re}(z)]^{۲}i=۴i$$

در نتیجه:

$$\mathrm{Re}(z)=\pm\sqrt{۲}$$

و بنابراین دو جواب برای z خواهیم داشت:

$$z=\pm\sqrt{۲}\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}i.$$

۲- حدهای زیر را به دست آورید:

الف: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+۱}{\sqrt[n]{n!}}$

روش اول: اگر قرار دهیم $A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+۱}{\sqrt[n]{n!}}$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}\ln A &=\ln\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+۱)^{n}}{n!}\right)^{\frac{۱}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\ln\frac{(n+۱)^{n}}{n!}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left(-\ln\frac{۱}{n+۱}-\ln\frac{۲}{n+۱}-\ln\frac{۳}{n+۱}-\cdots\cdots-\ln\frac{n}{n+۱}\right)\\&=-\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left(\ln\left(۱-\frac{n}{n+۱}\right)+\ln\left(۱-\frac{n-۱}{n+۱}\right)+\ln\left(۱-\frac{n-۲}{n+۱}\right)+\cdots\cdots+\ln\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)\right)\\&=-\int_{۰}^{۱}\ln(۱-x)dx=-\int_{۰}^{۱}\ln x\,dx\end{aligned}$$

و با انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\int_{۰}^{۱}\ln x\,dx=x\ln x\Big|_{۰}^{۱}-\int_{۰}^{۱}dx=-۱$$

و بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+۱}{\sqrt[n]{n!}}=e$$

روش دوم: با توجه به فرمول $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+۱}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ برای دنباله $(a_n)_{n\geq ۱}$ خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+۱}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+۱)^{n}}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+۲)^{n+۱}}{(n+۱)!}}{\dfrac{(n+۱)^{n}}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+۲}{n+۱}\right)^{n+۱}=\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱}=e$$

روش سوم: با توجه به فرمول استرلینگ برای n های بزرگ $n!\approx\dfrac{\sqrt{۲\pi}\,n^{n+\frac{۱}{۲}}}{e^{n}}$ هم می توانیم مساله را حل

کنیم. اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد، با توجه به اینکه $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{۲\pi}=۱$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{n}=۱$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\sqrt[n]{n!}\approx\sqrt[n]{\frac{\sqrt{۲\pi}n^{n+\frac{۱}{۲}}}{e^{n}}}\approx\frac{n}{e}$$

و در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+۱}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+۱}{\frac{n}{e}}=e$$

ب- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left(\frac{e^{\frac{۱}{n}}}{n}+۲\frac{e^{\frac{۲}{n}}}{n}+۳\frac{e^{\frac{۳}{n}}}{n}+\cdots\cdots+n\frac{e^{\frac{n}{n}}}{n}\right)$

بنابر قضیه اساسی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال حد فوق برابر است با :

$$\int_{۰}^{۱}xe^{x}dx=xe^{x}\Big|_{۰}^{۱}-\int_{۰}^{۱}e^{x}dx=۱$$

پ- $\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\left(\frac{۲^{x}+۳^{x}+۴^{x}}{۳}\right)^{\frac{۱}{x}}$

اگر $A=\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\left(\frac{۲^{x}+۳^{x}+۴^{x}}{۳}\right)^{\frac{۱}{x}}$ آنگاه:

$$\begin{aligned}\ln A&=\ln\lim_{x\to ۰^{+}}\left(\frac{۲^{x}+۳^{x}+۴^{x}}{۳}\right)^{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to ۰^{+}}\ln\left(\frac{۲^{x}+۳^{x}+۴^{x}}{۳}\right)^{\frac{۱}{x}}\\&=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\ln(۲^{x}+۳^{x}+۴^{x})-\ln ۳}{x}=\lim_{x\to ۰^{+}}\left(۲^{x}\ln ۲+۳^{x}\ln ۳+۴^{x}\ln ۴\right)=\ln ۲+\ln ۳+\ln ۴\end{aligned}$$

و بنابراین:

$$A=e^{\ln ۲+\ln ۳+\ln ۴}=۲۴$$

۳- انتگرال های زیر را حساب کنید.

الف- $\int\frac{x^{۴}-۱}{x^{۳}-x^{۲}+۴x+۴}dx$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^{۴}-۱}{x^{۳}-x^{۲}-۴x+۴}dx&=\int\frac{x^{۳}+x^{۲}+x+۱}{x^{۲}-۴}dx=\int(x+۱)dx+\int\frac{۵x+۵}{x^{۲}-۴}dx\\&=\frac{x^{۲}}{۲}+x+\frac{۵}{۲}\ln\left|x^{۲}-۴\right|+\frac{۵}{۴}\ln\left|\frac{x-۲}{x+۲}\right|+C\end{aligned}$$

ب- $\int\frac{-۳\sin x-۴\cos x}{۲\sin x+\cos x}dx$

$$\int\frac{-۳\sin x-۴\cos x}{۲\sin x+\cos x}dx=-\int\left(\frac{-\sin x+۲\cos x}{۲\sin x+\cos x}+۲\right)dx=-\ln\left|۲\sin x+\cos x\right|-۲x+C$$

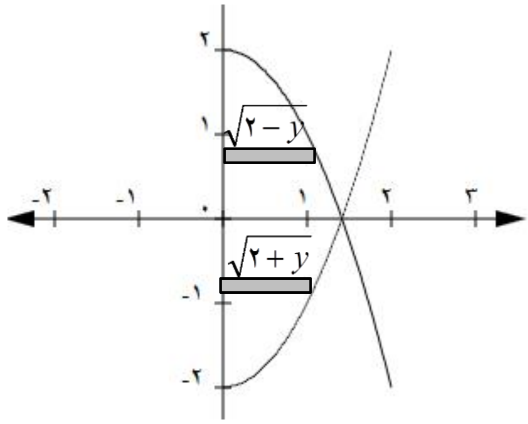
پ- $\int x\tan^{-1}(1+x)dx$

باجانشانی $1+x=t$ و سپس انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned}\int x\tan^{-1}(1+x)dx &= \int (t-1)\tan^{-1} t dt = \frac{(t-1)^2}{2}\tan^{-1} t - \frac{1}{2}\int \frac{(t-1)^2}{1+t^2}dt \\ &= \frac{(t-1)^2}{2}\tan^{-1} t - \frac{1}{2}\int dt + \int \frac{t}{1+t^2}dt \\ &= \frac{(t-1)^2}{2}\tan^{-1} t - \frac{1}{2}t + \ln\sqrt{1+t^2} + C \\ &= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}(1+x) - \frac{1+x}{2} + \ln\sqrt{1+(1+x)^2} + C\end{aligned}$$

۴- حجم حاصل از دوران سطح بین منحنی ها ی $y=x^2-2$ و $y=-x^2+2$ $(x\geq 0)$ را حول محور y ها به دست آورید.

تصویر ناحیه در روبرو رسم شده است:



حجم حاصل از دوران حول محور عرض ها بـه شـکل زیر به دست می آید:

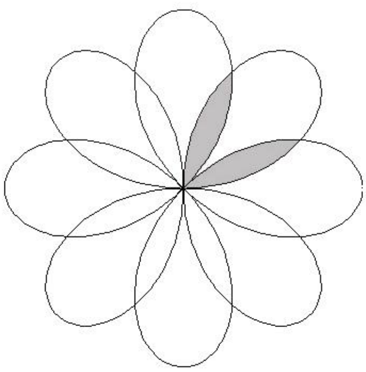
$$\int_0^2 \pi(2-y)dy + \int_{-2}^0 \pi(2+y)dy = 4\pi$$

۵-فقط به یکی از دو سوال زیر پاسخ دهید:

الف- سطح حاصل از دوران قسمتی از منحنی $y=\cosh^{-1}x$ در فاصله $1\leq x\leq \frac{5}{4}$ را حول محور x ها به دست آورید.

$$\int_1^{\frac{5}{4}} 2\pi\sqrt{1+\frac{1}{x^2-1}}dx = 2\pi\int_1^{\frac{5}{4}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = 2\pi\sqrt{x^2-1}\Big|_1^{\frac{5}{4}} = \frac{3\pi}{2}$$

ب- سطح بین دو منحنی $r=\sin 2\theta$ و $r=\cos 2\theta$ را در ربع اول مختصات به دست آورید.



$$\sin 2\theta = \cos 2\theta \Rightarrow \tan 2\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sin^2 2\theta}{2}d\theta + \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 2\theta}{2}d\theta + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{11\pi}{8}} \frac{\cos^2 2\theta}{2}d\theta + \int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\theta}{2}d\theta$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

ایران پور

۶-همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید:

الف- $\sum_{N=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

جمله عمومی با میل n به سمت بی نهایت به سمت صفر میل نمی کند، پس سری واگراست:

$$\frac{n^n}{n!}=\frac{n}{1}\frac{n}{2}\frac{n}{3}\cdots\frac{n}{n-1}\frac{n}{n}>1$$

ب- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{27^n(n!)^3}{(3n)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{27^{n+1}((n+1)!)^3}{(3n+3)!}}{\frac{27^n(n!)^3}{(3n)!}}=\frac{27(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}=\frac{27n^3+81n^2+81n+27}{27n^3+54n^2+33n+6}>1$$

دنباله جملات صعودی است و بنابراین جمله عمومی به سمت صفر میل نمی کند و سری واگراست.

۷-بازه همگرایی سری را تعیین و در نقاط انتهایی بحث کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{(2n+1)^2 3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}(x-1)^{n+1}}{(2n+3)^2 3^{n+1}}}{\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{(2n+1)^2 3^n}}\right|=|x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{3(2n+3)^2}=\frac{|x-1|}{3}$$

برای اینکه سری همگرا باشد، بایستی $\frac{|x-1|}{3}<1$ یا :

$$-2<x<4$$

در $x=-2$ سری به شکل زیر در می آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-3)^n}{(2n+1)^2 3^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

که هم ارز با $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ و همگراست. در $x=4$ سری به شکل زیر در می آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{(2n+1)^2 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

که بازهم همگراست. بنابراین بازه همگرایی سری به شکل $-2\le x\le 4$ است.

۸-سری مک لوران تابع $\frac{1}{x^3-x+2x^2-2}$ را به دست آورید.

$$\frac{1}{x^3-x+2x^2-2}=\frac{1}{(x+2)(x-1)(x+1)}=\frac{1}{3(x+2)}+\frac{1}{6(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}$$

$$\frac{۱}{x+۲}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱+\frac{x}{۲}}\right)=\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{x}{۲}+\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{x}{۲}\right)^{۳}+\cdots\cdots\right) \qquad -۲<x<۲$$

$$\frac{۱}{x-۱}=-\left(۱+x+x^{۲}+x^{۳}+\cdots\cdots\right) \qquad -۱<x<۱$$

$$\frac{۱}{x+۱}=۱-x+x^{۲}-x^{۳}+x^{۴}-\cdots\cdots \qquad -۱<x<۱$$

و به این ترتیب به ازای $|x|<۱$ داریم:

$$\frac{۱}{x^{۳}-x+۲x^{۲}-۲}=\frac{۱}{۶}\sum_{n=۰}^{\infty}\left(-\frac{x}{۲}\right)^{n}-\frac{۱}{۶}\sum_{n=۰}^{\infty}x^{n}-\frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}x^{n}=\frac{۱}{۶}\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{(-۱)^{n+۱}(۳\times۲^{n}-۱)}{۲^{n}}-۱\right)x^{n}$$

۱- عدد مختلط z را چنان بیابید که $\operatorname{Re}(z)=\sqrt{3}\operatorname{Im}(z)$ و $z\bar{z}=4$. سپس ریشه ششم z را تعیین کنید.

اگر $z=x+iy$ آنگاه بایستی $x=\sqrt{3}y$ و $z\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2=4$. بنابراین بایستی دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} x=\sqrt{3}y \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Rightarrow 3y^2+y^2=4 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

بنابراین z می تواند مقادیر زیر را به خود بگیرد:

$$z=-\sqrt{3}-i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=2e^{-i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{و} \quad z=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

این نتیجه را می توانستیم با $|z|=2$ و $\tan\theta=\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ نیز به دست آوریم.

ریشه های ششم اعداد فوق به ترتیب در زیر به دست آمده اند:

$$z=2e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow z^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{2}e^{i\frac{2k\pi+\frac{\pi}{6}}{6}}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{6}}{6}+i\sin\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{6}}{6}\right) \quad , \quad k=0,1,2,\ldots,5$$

$$z=2e^{-i\frac{5\pi}{6}} \Rightarrow z^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{2}e^{i\frac{2k\pi-\frac{5\pi}{6}}{6}}==\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{2k\pi-\frac{5\pi}{6}}{6}+i\sin\cos\frac{2k\pi-\frac{5\pi}{6}}{6}\right) \quad , \quad k=0,1,2,\ldots,5$$

۲- حدود زیر را به دست آورید:

الف- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\sinh t\,dt}{\frac{1}{6}x^3}$؛ ب) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{\ln(i+2n)-\ln n}{i+2n}$؛

الف) با بهره گیری از قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال و قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\sinh t\,dt}{\frac{1}{6}x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sinh x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{\frac{1}{2}x}=2$$

ب) با دستکاری عبارات خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{\ln(i+2n)-\ln n}{i+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2}{2n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{i}{n}+2\right)}{\frac{i}{n}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{i}{n}+2\right)}{\frac{i}{n}+2}$$

حال با توجه به اینکه تابع $\frac{\ln x}{x}$ در بازه $[2,3]$ پیوسته و بنابراین انتگرال پذیر است ، با بهره گیری از قضیه

اساسی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{i}{n}+2\right)}{\frac{i}{n}+2}=\int_{2}^{3}\frac{\ln x}{x}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}t\,dt=\frac{(\ln 3)^2-(\ln 2)^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2}\ln 6\right)$$

۳-انتگرال های زیر را حل کنید:

الف) $\int x\ln\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)dx$؛ ب) $\int\frac{x^3}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dx$؛ پ) $\int\frac{x^4+x^2+1}{x^3+x}dx$؛

الف) داریم:

$$2I=2\int x\ln\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)dx=\int x\ln\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)^2dx$$
$$=\int x\ln\left(2x^2-2\sqrt{x^4-1}\right)dx$$

حال با جانشانی $x^2=t$ و $xdx=\frac{dt}{2}$ خواهیم داشت:

$$2I=\frac{1}{2}\int\ln 2\left(t-\sqrt{t^2-1}\right)dt=\frac{\ln 2}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\ln\left(t-\sqrt{t^2-1}\right)dt$$

با انتگرال گیری جزء به جزء برای انتگرال دوم خواهیم داشت:

$$u=\ln\left(t-\sqrt{t^2-1}\right)\quad du=\frac{1-\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}}{t-\sqrt{t^2-1}}dt=-\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$
$$dv=dt\qquad v=t$$

$$\frac{1}{2}\int\ln\left(t-\sqrt{t^2-1}\right)dt=t\ln\left(t-\sqrt{t^2-1}\right)+\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}=t\ln\left(t-\sqrt{t^2-1}\right)+\sqrt{t^2-1}$$

و بنابراین:

$$2I=\frac{\ln 2}{2}x^2+\frac{x^2}{2}\ln\left(x^2-\sqrt{x^4-1}\right)+\sqrt{x^4-1}$$

و بالاخره:

$$I=\frac{x^2}{4}\ln\left(2x^2-2\sqrt{x^4-1}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{x^4-1}+C=\frac{1}{2}x^2\ln\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{1}{4}\sqrt{x^4-1}+C$$

--------- همچنین می توانیم از همان آغاز جانشانی $x^2=t$ و $xdx=\frac{dt}{2}$ را اعمال کنیم:

$$\int x\ln\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\ln\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}\right)dt$$

حال از انتگرال گیری جزء به جزء بهره می گیریم:

$$u=\ln\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}\right)\quad du=\frac{\frac{1}{2\sqrt{t+1}}-\frac{1}{2\sqrt{t-1}}}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}}dt=-\frac{dt}{2\sqrt{t^2-1}}$$

$$dv=dt\qquad v=t$$

$$\frac{1}{2}\int\ln\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}\right)dt=\frac{1}{2}t\ln\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}\right)+\frac{1}{4}\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$=\frac{1}{2}t\ln\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}\right)+\frac{1}{4}\sqrt{t^2-1}+C$$

و بنابراین:

$$\int x\ln\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)dx=\frac{1}{2}x^2\ln\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{1}{4}\sqrt{x^4-1}+C$$

ب) با جانشانی $x=a\tan\theta$ و $dx=a\sec^2\theta d\theta$ خواهیم داشت:

$$\int\frac{x^3}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dx=a^4\int\frac{\tan^3\theta\sec^2\theta d\theta}{(a^2\tan^2\theta+a^2)^{\frac{3}{2}}}=a\int\frac{\tan^3\theta}{\sec\theta}d\theta$$

$$=a\int\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}d\theta=a\int\frac{(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{a}{\cos\theta}+a\cos\theta+C$$

با توجه به اینکه $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$ جواب نهایی را می نویسیم:

$$\int\frac{x^3}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}+C=\frac{x^2+2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}+C$$

---- همچنین می توانیم انتگرال را با جدا کردن عبارات در انتگرالده حل کنیم:

$$\int\frac{x^3}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx-a^2\int\frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

خواهیم داشت:

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\sqrt{x^2+a^2}+C$$

و

$$\int\frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dx=-\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}+C$$

و در نتیجه:

$$\int\frac{x^3}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}+C=\frac{x^2+2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}+C$$

پ)با تقسیم صورت انتگرالده برمخرج آن خواهیم داشت:

$$\int \frac{x^4+x^2+1}{x^3+x}dx=\int\left(x+\frac{1}{x^3+x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\int\frac{dx}{x^3+x}$$

برای محاسبه انتگرال دوم از تبدیل به کسرهای جزیی بهره می گیریم:

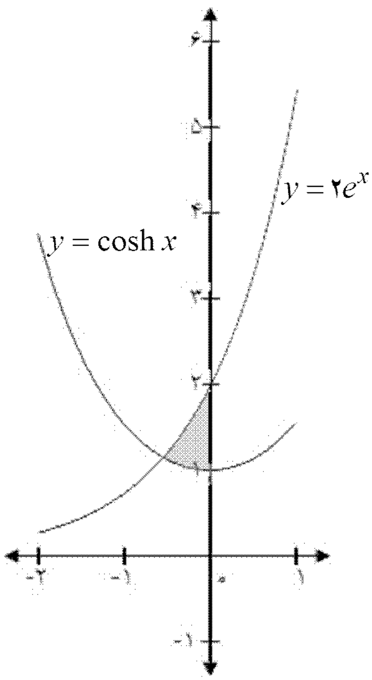
$$\int\frac{dx}{x^3+x}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+1}=\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$$

و بنابراین:

$$\int \frac{x^4+x^2+1}{x^3+x}dx=\frac{x^2}{2}+\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$$

۴- سطح بین منحنی های $y=2e^x$ و $y=\cosh x$ و محور عرض ها را حول محور x ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را به دست آورید.

نمودار دومنحنی در روبرو رسم شده و سطح محصور بین آن ها و محور عرض ها با رنگ تیره مشخص شده.



برای مشخص کردن نقطه برخورد معادله زیر راحل می کنیم:

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=2e^x\Rightarrow 3e^{2x}=1$$

در نتیجه نقطه برخورد عبارت است از:

$$x=\ln\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

روش واشر را برای محاسبه حجم به کار می گیریم:

$$\pi\int_{\ln\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0}\left(4e^{2x}-\cosh^2 x\right)dx=\pi\int_{\ln\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0}\left(4e^{2x}-\frac{\cosh 2x+1}{2}\right)dx=\pi\int_{\ln\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0}\left(4e^{2x}-\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\pi\int_{\ln\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0}\left(\frac{15e^{2x}-e^{-2x}}{4}-\frac{1}{2}\right)dx=\pi\left[\frac{15e^{2x}}{8}+\frac{e^{-2x}}{8}-\frac{x}{2}\right]_{\ln\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0}$$

$$=\pi\left(\frac{15}{8}+\frac{1}{8}-\frac{5}{8}-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\pi\left(1+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

۵- همگرایی یا واگرایی سری و انتگرال زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n)^{n^2}}$؛ ب) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

الف) از آزمون کوشی (ریشه) بهره می گیریم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^n}{(n)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$$

دنباله $a_n = \frac{n!}{n^n}$ به وضوح دنباله ای نزولی است و یک کران پایین آن صفر است و بنـابراین همگراسـت . بـا توجه به اینکه جملات دنباله به طور اکید نزولی اند و به ازای $n > 2$ همه جملات از یک کوچکترند، پس حـد آن نیز از یک کوچکتر است (در واقع این حد برابر با صفر است) . بنابراین سری مورد نظر همگراست.

----- همچنین می توانیم برای محاسبه حـد فـوق بـافرض اینکـه $A = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$ اسـت از لگـاریتم بهـره بگیریم:

$$\ln A = \ln \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{i}{n}$$

حال از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل بهره می گیریم:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{i}{n} = \int_0^1 \ln x dx$$

روشن است که انتگرال فوق ناسره است و به سمت $-\infty$ میل می کند و در نتیجه $\ln A \to -\infty$ یـا $A \to 0$ و بنابراین سری مورد بررسی همگراست.

ب) برای بررسی همگرایی انتگرال آن را به شکل حاصل جمع دو انتگرال می نویسیم:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{1} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

با توجه به اینکه $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$ بنابراین انتگرالده در بازه $[0,1]$ کران دار و در بازه $(0,1]$ پیوسته اسـت و بـه این ترتیب $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ همگراست.

برای بررسی همگرایی انتگرال دوم از آزمون مقایسه بهره می گیریم. بـا توجـه بـه اینکـه بـه ازای هـر $x > 1$ داریم: $\frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ و $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ همگراست، در نتیجه $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ نیز همگراست.

با توجه به اینکه هر دو انتگرال همگرایند پس حاصل جمعشان $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ همگراست.

------ همچنین می توانیم از آزمون مقایسه حدی برای بررسی همگرایی انتگرال $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ بهره بگیریم:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin^2 x}{x^2}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to 0^+} x^{p-2}\sin^2 x$$

اگر $p=\frac{1}{2}$ حد بالا به شکل زیر در می آید که با استفاده از قاعده هوپیتال خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin 2x}{3\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{8\sqrt{x}\cos 2x}{3} = 0$$

و به این ترتیب همگرایی $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ همگرایی $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ را ایجاب می کند.

۶- بازه همگرایی سری توانی زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}-(2x+1)^n}{(n+1)^2 4^n}$$

سری را به شکل حاصل جمع دو سری می نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}-(2x+1)^n}{(n+1)^2 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2 4^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{(n+1)^2 4^n}$$

اولین سری یک سری عددی متناوب است که دنباله جملات آن نزولی است و جمله عمومی آن به سمت صفر میل می کند و بنابراین همگراست.

برای سری دوم از آزمون نسبت بهره می گیریم:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(2x+1)^{n+1}}{(n+2)^2 4^{n+1}}}{\frac{(2x+1)^n}{(n+1)^2 4^n}} \right| = |2x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2 4} = \frac{|2x+1|}{4}$$

برای اینکه سری همگرا باشد بایستی $|2x+1|<4$ یا $-\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}$.

در $x=\frac{3}{2}$ سری به شکل زیر در می آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)^2 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

که یک سری هم ارز با سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ است و همگراست. در $x=-\frac{5}{2}$ سری به شکل زیر در می آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(n+1)^2 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

که این هم همگراست. بنابراین سری به ازای $-\frac{5}{2} \le x \le \frac{3}{2}$ همگراست.

در نتیجه سری اصلی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - (2x+1)^n}{(n+1)^2 4^n}$ نیز به ازای $-\frac{5}{2} \le x \le \frac{3}{2}$ همگراست.

۷- سری مک لوران مشتق تابع $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$ را تعیین کرده و با استفاده از آن مقدار سری $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{-(2i+2)}}{2i+1}$ را به دست آورید.

$$f(x) = \ln(2x-1) - \ln(2x+1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{2}{2x+1}$$

اگر $|x| < \frac{1}{2}$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n \qquad \frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n$$

و بنابراین:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n = -2\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + 1\right) 2^n x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n+2} x^{2n} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه به ازای $|x| < \frac{1}{2}$ سری همگراست، بنابراین انتگرال گیری در بازه اخیر برای سری و تابع متناظرش جواب یکسان می دهد. بنابراین:

$$f(x) = \ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n+2} \int_0^x t^{2n} dt = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n+2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

با جایگذاری $x = \frac{1}{4}$ در سری اخیر خواهیم داشت:

$$-\sum_{i=0}^{\infty} 2^{2i+2} \frac{2^{-4i-2}}{2i+1} = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{-2i}}{2i+1} = \ln\left|\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right| = -\ln 3$$

و در نتیجه:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{-(2i+2)}}{2i+1} = \frac{\ln 3}{4}$$

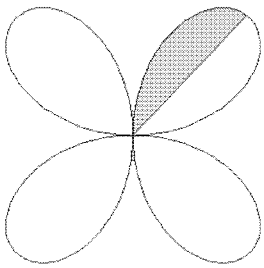
۸- از دو سوال زیر فقط به یکی پاسخ دهید.

الف)سطح ناحیه محصور بین منحنی قطبی $r=\sin ۲\theta$ و خطوط $\theta=\frac{\pi}{۴}$ و $\theta=\frac{\pi}{۲}$ را محاسبه کنید.

ب)طول خم $y=\int_{\circ}^{x}\sinh t dt$ را بین نقاط $x=\circ$ تا $x=\ln ۲$ تعیین کنید.

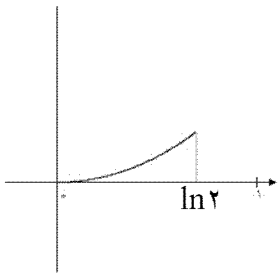
الف- ناحیه مورد نظر در شکل مقابل به رنگ تیره آمده است.

برای محاسبه مساحت از فرمول $\frac{۱}{۲}\int_{\theta_۱}^{\theta_۲} r^۲ d\theta$ بهره می گیریم:



$$\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^۲ ۲\theta d\theta=\frac{۱}{۴}\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}(۱-\cos ۴\theta)d\theta=\frac{\theta}{۴}-\frac{\sin ۴\theta}{۸}\Big|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{\pi}{۱۶}+\frac{۱}{۸}$$

ب- با توجه به اینکه بنابر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال $y'=\sinh x$ ، خواهیم داشت:



$$\int_{\circ}^{\ln ۲}\sqrt{۱+\sinh^۲ x}dx=\int_{\circ}^{\ln ۲}\cosh x dx=\sinh\ln ۲=\frac{۳}{۴}$$

۱- الف- هرگاه $-\frac{\pi}{۴}<\theta<\frac{\pi}{۴}$ و $\tan\theta=\tanh t$ آنگاه شکل قطبی عدد مختلط $\cosh t+i\sinh t$ را به دست آورید.

$$\tanh t=\tan\theta \Rightarrow \frac{۱}{\cosh^{۲} t}=۱-\tanh^{۲} t=۱-\tan^{۲}\theta \Rightarrow \cosh t=\frac{۱}{\sqrt{۱-\tan^{۲}\theta}}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta}}$$

و بنابراین:

$$\sinh t=\sqrt{\cosh^{۲} t-۱}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta}}$$

و به این ترتیب داریم:

$$\cosh t+i\sinh t=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\sqrt{\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta}}=\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{\cos ۲\theta}}=\frac{\sqrt{۲}e^{i\theta}}{\sqrt{e^{۲i\theta}+e^{-۲i\theta}}}$$

ب- فرض کنید α,β دو عدد مختلط باشند به طوری که $\alpha\beta=۱۳i$ و $\alpha+\beta=۵(۱+i)$. در این صورت مقدار $\alpha^{۳}+\beta^{۳}$ را به دست آورید.

داریم:

$$\alpha^{۳}+\beta^{۳}=(\alpha+\beta)(\alpha^{۲}-\alpha\beta+\beta^{۲})$$

و

$$\alpha^{۲}+\beta^{۲}=(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta=۲۵(۱+i)^{۲}-۲۶i=۲۴i$$

بنابراین:

$$\alpha^{۳}+\beta^{۳}=۵(۱+i)(۲۴i-۱۳i)=-۵۵+۵۵i$$

روش دوم- می توانیم از حل معادله زیر نیز بهره بگیریم:

$$z^{۲}-۵(۱+i)z+۱۳i=۰\Rightarrow z=\frac{۵(۱+i)\pm\sqrt{۵۰i-۵۲i}}{۲}=\frac{۵(۱+i)\pm\sqrt{۲}(-i)^{\frac{۱}{۲}}}{۲}$$

با توجه به اینکه ریشه های دوم $-i$ عبارتند از :

$$e^{-i\frac{\pi}{۴}},e^{i\frac{۳\pi}{۴}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱-i),\frac{\sqrt{۲}}{۲}(-۱+i)$$

بنابراین:

$$\sqrt{۲}(-i)^{\frac{۱}{۲}}=۱-i,-۱+i$$

و در نتیجه:

$$\alpha,\beta=\frac{۵(۱+i)\pm(-۱+i)}{۲}=۲+۳i,۳+۲i$$

و

$$\alpha,\beta=\frac{۵(۱+i)\pm(۱-i)}{۲}=۳+۲i,۲+۳i$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\alpha^{۳}+\beta^{۳}=(۲+۳i)^{۳}+(۳+۲i)^{۳}=-۵۵+۵۵i$$

۲- فرض کنید f تابعی است که در هر فاصله کران دار انتگرال پذیر است. به علاوه فرض کنید که f در معادله زیر صدق می کند:

$$\int_{۰}^{x} f(t)dt=(x-۱)f(x)+۱$$

الف- نشان دهید که اگر $x\neq ۱$ آنگاه f پیوسته است.

با شرط $x_\circ \neq ۱$ حد زیر را درنظر می گیریم:

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{\int_\circ^x f(t)dt - ۱}{x-۱}$$

با توجه به اینکه $\int_\circ^{x_\circ} f(t)dt$ مقداری معین است، صورت و مخرج مقادیر معینی دارنـد و مخـرج در $x_\circ$ صـفر نمی شود، پس حد فوق موجود و برابر با مقدار حد در $x = x_\circ$ است که بنابر صدق تـابع در معادلـه بـالا ایـن حد برابر با $f(x_\circ)$ است. پس:

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{\int_\circ^x f(t)dt - ۱}{x-۱} = \lim_{x\to x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$$

یعنی تابع در هر نقطه $x \neq ۱$ پیوسته است.

ب- نشان دهید که اگر $x \neq ۱$ آنگاه f مشتق پذیر است.

با توجه به اینکه f در چنین نقطـه ای پیوسـته اسـت، بنـابر قضـیه اساسـی حسـاب دیفرانسـیل و انتگـرال $\frac{d}{dx}\int_\circ^x f(t)dt$ موجود و برابر با $f(x)$ است. بنابراین:

$$f(x) = \frac{\int_\circ^x f(t)dt - ۱}{x-۱}$$

به صورت خارج قسمت دو تابع مشتق پذیر خواهد بود که در صورت $x \neq ۱$ مخرجش صفر نمـی شـود و بـه این ترتیب یک تابع مشتق پذیر است.

ج- تابع $f(x)$ را با مشتق گیری از طرفین معادله بالا حساب کنید:

$$\frac{d}{dx}\int_\circ^x f(t)dt = f(x) = f(x) + (x-۱)f'(x) \Rightarrow f'(x) = \circ \Rightarrow f(x) = C$$

۳- انتگرال های الف- $\int\frac{dx}{(x-۱)(x+۲)(x+۳)}$ ب- $\int_\circ^\infty \frac{dx}{(۱+x^۲)^۲}$ ج- $\int\frac{x^۳\cos^{-۱}x dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$ را محاسبه کنید.

الف- با بهره گیری از روش کسرهای جزیی داریم:

$$\begin{aligned}\frac{۱}{(x-۱)(x+۲)(x+۳)} &= \frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۲}+\frac{C}{x+۳}\\ &= \frac{x^۲(A+B+C)+x(۵A+۲B+C)+۶A-۳B-۲C}{(x-۱)(x+۲)(x+۳)}\end{aligned}$$

بابرابر گرفتن ضرایب توان های متناظر x خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A+B+C=\circ \\ ۵A+۲B+C=\circ \\ ۶A-۳B-۲C=۱\end{cases} \Rightarrow A=\frac{۱}{۱۲}, B=-\frac{۱}{۳}, C=\frac{۱}{۴}$$

و به این ترتیب:

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+3}$$
$$= \frac{1}{12}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x+3| + C$$

ب- با جانشانی $x=\tan\theta$ و $dx=\sec^2\theta d\theta$ داریم:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta d\theta}{(1+\tan^2\theta)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{\pi}{4}$$

روش دیگر- می توانیم با انتگرال گیری جزء به جزء نیز مساله را حل کنیم. در انتگرال $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ قرار می دهیم:

$$u=\frac{1}{(1+x^2)} \quad du=\frac{-2xdx}{(1+x^2)^2}$$
$$dv=dx \quad v=x$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} - 2\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

بنابراین:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

ج- جانشانی $\cos^{-1}x=t$ و $x=\cos t$ و $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-dt$ را اعمال می کنیم:

$$\int \frac{x^3\cos^{-1}xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int t\cos^3 tdt$$

اکنون از انتگرال گیری جزء به جزء بهره می گیریم:

$$t=u \qquad dt=du$$
$$dv=\cos^3 tdt \quad v=\int\cos^3 tdt=\int(1-\sin^2 t)\cos tdt=\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}$$

$$-\int t\cos^3 tdt = -t\sin t + t\frac{\sin^3 t}{3} + \int \sin tdt - \frac{1}{3}\int \sin^3 tdt$$
$$= -t\sin t + t\frac{\sin^3 t}{3} - \cos t - \frac{1}{3}\left(-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right) + C$$

با توجه به اینکه $\cos^{-1}x=t$ و $x=\cos t$ و $\sin t=\sqrt{1-x^2}$ خواهیم داشت:

$$\int \frac{x^3\cos^{-1}xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x + \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3}\cos^{-1}x - \frac{2x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

۴- درون مخزنی کروی شکل به شعاع ۱۰ متر تا ارتفاع ۱۲ متری آب ریخته ایم. حجم آب موجود را حساب کنید.

حجم حاصل از دوران نیمه راست دایره $x^۲+y^۲=۱۰۰$ از $y=-۱۰$ تا $y=۲$ را حول محور عرض ها محاسبه می کنیم:

$$\int_{-۱۰}^{۲}\pi x^۲dy=\pi\int_{-۱۰}^{۲}(۱۰۰-y^۲)dy=\pi\left[۱۰۰y-\frac{y^۳}{۳}\right]_{-۱۰}^{۲}=۸۶۴\pi$$

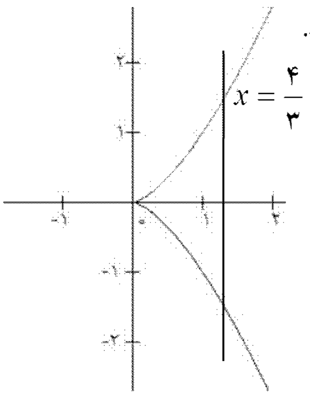
یا حجم حاصل از دوران نیمه راست دایره $x^۲+y^۲=۱۰۰$ از $y=۲$ تا $y=۱۰$ حول محور عرض ها را از حجم کل کره کسر می کنیم:

$$\frac{۴\pi\times۱۰^۳}{۳}-\int_{۲}^{۱۰}\pi x^۲dy=\frac{۴\pi\times۱۰^۳}{۳}-\pi\int_{۲}^{۱۰}(۱۰۰-y^۲)dy=\frac{۴\pi\times۱۰^۳}{۳}-\pi\left[۱۰۰y-\frac{y^۳}{۳}\right]_{۲}^{۱۰}=۸۶۴\pi$$

همین محاسبه را می توانیم با روش پوسته هم انجام دهیم:

$$\frac{۴\pi\times۱۰^۳}{۳}-\int_{۲}^{۱۰}۲\pi x(y-۲)dy=\frac{۴\pi\times۱۰^۳}{۳}-۲\pi\int_{۲}^{۱۰}x(\sqrt{۱۰۰-x^۲}-۲)dx=۸۶۴\pi$$

۵- طول خم $y^۲=x^۳$ را که توسط خط $x=\frac{۴}{۳}$ بریده می شود، حساب کنید.



$$۲y'y=۳x^۲\Rightarrow y'=\frac{۳x^۲}{۲y}=\frac{۳x^۲}{۲\sqrt{x^۳}}$$

$$L=۲\int_{۰}^{\frac{۴}{۳}}\sqrt{۱+\frac{۹x^۴}{۴x^۳}}dx=\int_{۰}^{\frac{۴}{۳}}\sqrt{۴+۹x}dx=\frac{۱۱۲}{۲۷}$$

۶-فرض کنید $f(x)=\frac{x}{e^x-۱}+\frac{۱}{۲}x$.

الف – نشان دهید $f(x)=\frac{۱}{۲}x\coth\left(\frac{x}{۲}\right)$.

اگر $x\neq۰$ داریم:

$$f(x)=x\left(\frac{۱}{e^x-۱}+\frac{۱}{۲}\right)=\frac{x}{۲}\left(\frac{e^x+۱}{e^x-۱}\right)=\frac{x}{۲}\left(\frac{e^{\frac{x}{۲}}+e^{-\frac{x}{۲}}}{e^{\frac{x}{۲}}-e^{-\frac{x}{۲}}}\right)=\frac{x}{۲}\coth\frac{x}{۲}$$

پس هر دو تابع به ازای $x\neq۰$ با هم یکسان هستند.

ب- توضیح دهید که چرا انتگرال $\int_{-۱}^{۱}xf(x)dx$ ریمن است و سپس مقدار انتگرال را حساب کنید.

با توجه به اینکه انتگرالده $xf(x)$ به جز در $x=۰$ در بقیه نقاط بازه $[-۱,۱]$ پیوسته است و:

$$\lim_{x\to۰}xf(x)=\lim_{x\to۰}\frac{x^۲}{e^x-۱}+\frac{۱}{۲}x^۲=۰$$

یعنی در $x=0$ نیز مقدار انتگرالده کران دار است، پس انتگرال $\int_{-1}^{1} xf(x)dx$ موجود و متناهی است.

برای محاسبه انتگرال با توجه به اینکه اگر قرار دهیم $h(x)=xf(x)$ آنگاه:

$$\begin{aligned} h(-x) &= -xf(-x)=\frac{x^2}{e^{-x}-1}+\frac{x^2}{2}=-\frac{x^2e^x}{e^x-1}+\frac{x^2}{2}=-\frac{x^2(e^x-1)}{e^x-1}-\frac{x^2}{e^x-1}+\frac{x^2}{2} \\ &= -\frac{x^2}{e^x-1}-\frac{x^2}{2}=h(x) \end{aligned}$$

یعنی انتگرالده فرد است و بنابراین:

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$$

ج- نشان دهید $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x-1}dx=-\frac{1}{3}$.

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2}{e^x-1}+\frac{x^2}{2}\right)dx=0\Rightarrow\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)dx=-\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}dx=-\frac{1}{3}$$

۷-الف- فرض کنید $p>0$. نشان دهید $\int_{1}^{\infty}\frac{x^{-p}}{x+1}dx$ همگراست.

با بهره گیری از آزمون مقایسه حدی داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^{-p}}{x+1}}{\frac{1}{x^{p+1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1$$

و با توجه به $p+1>1$ همگرایی برقرار است.

ب-نشان دهید $\int_{1}^{\infty}\frac{x^{-p}}{x+1}dx=\int_{0}^{1}\frac{x^{p-1}}{x+1}dx$.

جانشانی $x=\frac{1}{t}$ و $dx=-\frac{dt}{t^2}$ را اعمال می کنیم:

$$\int_{1}^{\infty}\frac{x^{-p}}{x+1}dx=-\int_{1}^{0}\frac{t^p}{\frac{1}{t}+1}\frac{dt}{t^2}=\int_{0}^{1}\frac{t^{p-1}}{t+1}dt$$

۸-در سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ هرگاه $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ می توان از آزمون رابه کمک گرفت. قرار می دهیم $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=L$. هرگاه $L>1$ سری همگرا و اگر $L<1$ آنگاه سری واگراست. درسری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ که

درآن $a_n = a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$ به کمک آزمون رابه برحسب مقادیر مختلف $a \neq e$ در همگرایی و واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بحث کنید.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}}{a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

وبنابراین اگر $a > e$ سری همگرا و اگر $a < e$ سری واگرا خواهد بود.

۹- الف- نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ همگراست.

با بهره گیری از آزمون نسبت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

و بنابراین سری همگراست.

ب- مقدار سری قسمت الف را حساب کنید.

سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ به ازای $|x| < 1$ همگراست و برابر است با $f(x) = \frac{1}{1-x}$. مشتق تابع اخیر عبارت است از $\frac{1}{(1-x)^2}$ و در بازه همگرایی سری یعنی $|x| < 1$ برابر است با سری $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. حال قرار می دهیم $x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = \frac{1}{(1-0/5)^2} = 4$$

۱۰-الف- نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}$ همگراست.

با بهره گیری از آزمون نسبت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n+3)(2n+3)!}}{\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{(2n+3)(2n+2)(2n+3)} = 0$$

و بنابراین سری همگراست.

ب- نشان دهید $\left|\int_0^1 \frac{\sin x dx}{x}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}$

با توجه به اینکه $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ و اگر $x \neq 0$ داریم:

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

بنابراین:

$$\int_0^1\frac{\sin x dx}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$$

و در نتیجه:

$$\left|\int_0^1\frac{\sin x dx}{x}\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}$$

۱۱- با توجه به $\int_0^1 xe^{yx}dx\ge 0$ برای هر عدد حقیقی y، نشان دهید که $e^y\ge y+1$ برای هر عدد حقیقی y.

به ازای هر عدد حقیقی $a\ne 0$ با انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\int_0^1 xe^{ax}dx=x\frac{e^{ax}}{a}\Big|_0^1-\frac{1}{a}\int_0^1 e^{ax}dx=\frac{ae^a-e^a+1}{a^2}\ge 0$$

در نابرابری به دست آمده قرار می دهیم $a=-y$ و بنابراین به ازای هر عدد حقیقی $y\ne 0$ داریم:

$$\frac{-ye^{-y}-e^{-y}+1}{y^2}\ge 0\Rightarrow\frac{-y-1+e^y}{y^2e^y}\ge 0\Rightarrow e^y\ge y+1$$

با توجه به اینکه حکم مساله به ازای $y=0$ نیز به وضوح برقرار است، به ازای هر عدد حقیقی y داریم:

$e^y\ge y+1$

۱- معادله $z^{3}+\sqrt{3}=i$ را حل کنید.

داریم:

$$z^{3}=-\sqrt{3}+i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

و بنابراین کافی است ریشه های دوم عدد $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ را بیابیم:

$$c_{0}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{18}} \quad \text{و} \quad c_{1}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi+\frac{5\pi}{6}}{3}}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{17\pi}{18}} \qquad c_{2}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{4\pi+\frac{5\pi}{6}}{3}}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{29\pi}{18}}$$

۲-حدود زیر را در صورت وجود بیابید.

الف- $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{e^{-x^{-2}}}{x}$ ب- $\lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{k}\sqrt{\frac{3}{k^{2}}+\frac{n}{k^{3}}}$ ج- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

الف- قرار می دهیم $u=x^{-1}=\frac{1}{x}$ و سپس از قاعده هوپیتال بهره می گیریم:

$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{e^{-x^{-2}}}{x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{e^{u^{2}}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{2ue^{u^{2}}}=0$$

ب- $$\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{k}\sqrt{\frac{3}{k^{2}}+\frac{n}{k^{3}}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k}\sqrt{3+\frac{n}{k}}\right)$$

حال از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل انتگرال بهره می گیریم:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k}\sqrt{3+\frac{n}{k}}\right)=\int_{0}^{1}\sqrt{3+x}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{(3+x)^{3}}\Big|_{0}^{1}=\frac{16-3\sqrt{3}}{3}$$

پ-قرار می دهیم: $\tan x=1+\alpha$. در این صورت وقتی $x\to\frac{\pi}{4}^{+}$ داریم $\alpha\to 0$ و در عین حال با توجه به فرمول مثلثاتی $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^{2}x}$ خواهیم داشت:

$$\tan 2x=\frac{2(1+\alpha)}{-2\alpha-\alpha^{2}}$$

به این ترتیب:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}}(\tan x)^{\tan 2x}=\lim_{\alpha\to 0^{+}}(1+\alpha)^{-\frac{2(1+\alpha)}{\alpha^{2}+2\alpha}}=e^{\lim\limits_{\alpha\to 0^{+}}-\alpha\frac{2(1+\alpha)}{\alpha^{2}+2\alpha}}=e^{-1}$$

روش دوم: با توجه به مثبت بودن عبارتی که حد آن گرفته می شود می توانیم از تابع لگاریتم بهره بگیریم.

اگر $A=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}}(\tan x)^{\tan 2x}$ آنگاه:

$$\begin{aligned}\ln A &= \ln\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\tan x)^{\tan 2x}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\ln(\tan x)^{\tan 2x}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan 2x\ln\tan x == \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{\tan 2x}}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}\end{aligned}$$

و اکنون از قاعده هوپیتال استفاده می کنیم:

$$\ln A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\ln\tan x}{\cot 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{-2\csc^2 2x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\frac{1}{\sin x\cos x}}{\frac{1}{\sin^2 2x}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\sin 2x = -1$$

و بنابراین:

$$A = e^{\ln A} = e^{-1}$$

۳- الف- هرگاه $x>0$ باشد، آنگاه نشان دهید $\tanh x < x < \sinh x$

ب- هر گاه $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{3}$ آنگاه نشان دهید $\tan\beta-\tan\alpha<4(\alpha-\beta)$.

الف- می توانیم از قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته (کوشی) بهره بگیریم. اگر $x>0$ آنگاه:

$$\frac{\sinh x-\sinh 0}{x-0}=\frac{\cosh c}{1} \qquad ,0<c<x$$

و با توجه به اینکه به ازای $c>0$ داریم $\cosh c>1$ در نتیجه $\frac{\sinh x}{x}>1$ یا $x<\sinh x$.

همچنین اگر $x>0$ آنگاه:

$$\frac{\tanh x-\tanh 0}{x-0}=\frac{\sec h^2 c}{1} \qquad ,0<c<x$$

و با توجه به اینکه به ازای $c>0$ داریم $\sec h^2 c<1$ در نتیجه $\frac{\tanh x}{x}<1$ یا $\tanh x<x$.

روش دوم: تابع $f(x)=\sinh x-x$ را درنظر می گیریم. بـه ازای $x>0$ داریـم $f'(x)=\cosh x-1>0$ و بنابراین تابع بر $x>0$ صعودی است و با توجه به اینکه $f(0)=0$ بنابراین به ازای هر $x>0$ داریم:

$$f(x)=\sin x-x>0\Rightarrow\sin x>x$$

همچنین تابع $g(x)=x-\tanh x$ را در نظر می گیریم. بـه ازای $x>0$ داریـم: $g'(x)=1-\sec h^2 x>0$ و بنابراین تابع $g(x)$ بر $x>0$ صعودی است و با توجه به اینکه $g(0)=0$ ، به ازای هر $x>0$ داریم:

$$g(x)=x-\tanh x>0\Rightarrow x>\tanh x$$

ب- با بهره گیری از قضیه مقدار میانگین داریم:

$$\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}=\sec^2 C \qquad 0<\beta<C<\alpha<\frac{\pi}{3}$$

با توجه به اینکه تابع $\sec^2 x$ یک تابع صعودی بر $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ است و $\sec^2 0=1$، خواهیم داشت:

$$1<\sec^2\beta<\sec^2 C=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}<\sec^2\alpha<\sec^2\frac{\pi}{3}=4$$

و به این ترتیب حکم برقرار است.

۴-انتگرال های زیر را محاسبه کنید:

الف- $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$ ب- $\int\frac{dx}{x^3+x^2-5x+3}$ پ- $\int(\arcsin x)^2dx$ ت- $\int\frac{\cos x dx}{\sin^2 x+\tan^2 x}$

الف- از روش اویلر بهره می گیریم. قرار می دهیم :

$$\sqrt{x^2-x+3}=x+t$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$x^2-x+3=x^2+2xt+t^2\Rightarrow x=\frac{3-t^2}{1+2t}$$

$$dx=-2\frac{t^2+t+3}{(1+2t)^2}dt$$

با جایگذاری در انتگرال خواهیم داشت:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}=-2\int\frac{\frac{t^2+t+3}{(1+2t)^2}}{\frac{3-t^2}{1+2t}\left(\frac{3-t^2}{1+2t}+t\right)}dt=-2\int\frac{t^2+t+3}{(3-t^2)(t^2+t+3)}dt$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2-3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+3}-x-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+3}-x+\sqrt{3}}\right|+C$$

می توانستیم جانشانی $\sqrt{x^2-x+3}=xt+\sqrt{3}$ را نیز اعمال کنیم(امتحان کنید). همچنین با توجه به اینکه $x^2-x+3=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$ می توانیم از جانشانی $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{11}}{2}\sinh\theta$ یا $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{11}}{2}\tan\theta$ نیز بهره بگیریم، هرچند مستلزم راه حلی طولانی و نسبتا پیچیده تر خواهد بود.

ب- با توجه به اینکه مخرج انتگرالده $\int\frac{dx}{x^3+x^2-5x+3}$ را می توان به شکل $(x-1)^2(x+3)$ تجزیه کرد، از روش کسرهای جزیی بهره می گیریم.

$$\frac{1}{x^3+x^2-5x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+3}=\frac{x^2(A+C)+x(2A+B-2C)-3A+3B+C}{x^3+x^2-5x+3}$$

با حل دستگاه زیر به جواب $A=-\frac{1}{16}$ و $B=\frac{1}{4}$ و $C=\frac{1}{16}$ می رسیم:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B-2C=0 \\ -3A+3B+C=1 \end{cases}$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^3+x^2-5x+3} &= -\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x+3} \\ &= -\frac{1}{16}\ln|x-1|-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{16}\ln|x+3|+C \\ &= \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+3}{x-1}\right|-\frac{1}{4(x-1)}+C\end{aligned}$$

پ- با جانشانی $t=\arcsin x$ و $x=\sin t$ و $dx=\cos t dt$ خواهیم داشت:

$$\int(\arcsin x)^2 dx=\int t^2\cos t dt$$

حال با دو بار انتگرال گیری جزء به جزء انتگرال حل می شود:

$$\begin{aligned}\int t^2\cos t dt &= t^2\sin t-2\int t\sin t dt=t^2\sin t+2t\cos t-2\int\cos t dt \\ &= t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+C \\ &= (\arcsin x)^2 x+2(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}-2x+C\end{aligned}$$

ت-داریم:

$$\int\frac{\cos x dx}{\sin^2 x+\tan^2 x}=\int\frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x(\cos^2 x+1)}$$

اکنون از جانشانی $\sin x=u$ بهره می گیریم:

$$\int\frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x(\cos^2 x+1)}=\int\frac{(1-u^2)du}{u^2(2-u^2)}$$

با بهره گیری از روش کسرهای جزیی خواهیم داشت:

$$\frac{1-u^2}{u^2(2-u^2)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u^2}+\frac{C}{\sqrt{2}-u}+\frac{D}{\sqrt{2}+u}=\frac{u^3(-A+C-D)+u^2(-B+\sqrt{2}C+\sqrt{2}D)+u(2A)+2B}{u^2(2-u^2)}$$

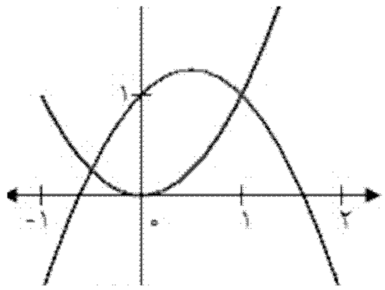
با حل دستگاه حاصل از هم ارز گرفتن ضرایب توان های یکسان در دو سوی برابری خواهیم داشت:

$$A=0 \quad B=\frac{1}{2} \qquad C=-\frac{\sqrt{2}}{8} \qquad D=-\frac{\sqrt{2}}{8}$$

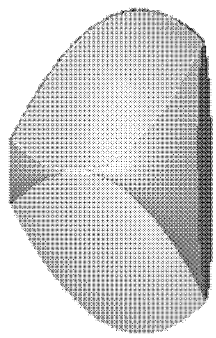
و بنابراین:

$$\begin{aligned}\int\frac{(1-u^2)du}{u^2(2-u^2)} &= \frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2}-\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{du}{\sqrt{2}-u}-\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{du}{\sqrt{2}+u}\\ &= -\frac{1}{2u}+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\sqrt{2}-u\right|-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\sqrt{2}+u\right|+C\\ &= -\frac{1}{2u}+\frac{\sqrt{2}}{8}\left|\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2}+u}\right|+C\\ &= -\frac{\csc x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-\sin x}{\sqrt{2}+\sin x}\right|+C\end{aligned}$$

۴-حجم حاصل از دوران ناحیه بین دو منحنی $y=x^2$ و $y=x-x^2+1$ را حول محور x ها بیابید.



محل برخورد دو منحنی را با حل معادله $x-x^2+1=x^2$ بـه دسـت می آوریم. دومنحنی در نقاط $x=1$ و $x=-\frac{1}{2}$ همدیگر را قطع مـی کنند. با توجه به اینکه در محدوده $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ داریـم $x-x^2+1>x^2$ حجم حاصل از دوران منحنی را می توانیم به راحتی با بهره گیری از واشرهای تقریب ساز بیابیم:



$$\begin{aligned}V &= \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left((x-x^2+1)^2-x^4\right)dx=\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(-2x^3-x^2+2x+1\right)dx\\ &= \pi\left[-\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}=\frac{45}{32}\pi\end{aligned}$$

۶- طول خم منحنی پارامتری $y=8\sin^3 x$ و $x=8\cos^3 x$ که $0<t<2\pi$ را بیابید.

داریم:

$$x'=-24\sin t\cos^2 t \qquad \text{و} \qquad y'=24\cos t\sin^2 t$$

و بنابراین:

$$\begin{aligned}L &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(-24\sin t\cos^2 t\right)^2+\left(24\cos t\sin^2 t\right)^2}\,dt\\ &= 96\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}\,dt=96\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=48\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=48\end{aligned}$$

۷- نشان دهید انتگرال $\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ همگراست.

با بهره گیری از انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = -\lim_{b\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\Big|_1^b - \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx = \frac{\cos 1}{1} - \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

با توجه به اینکه به ازای $x > 1$ داریم:

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| < \frac{1}{x^2}$$

بنابرآزمون مقایسه $\int_{1}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ همگراست و در نتیجه $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ به طور مطلق همگراست و بنابراین $\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos}{x} dx$ نیز همگراست.

۸- بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ را یافته و در نقاط کرانه ای بحث کنید.

با بهره گیری از آزمون ریشه داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} |x|^n} = |x| \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{|x|}{e}$$

برای اینکه سری همگرا باشد، بایستی داشته باشیم:

$$\frac{|x|}{e} < 1 \Rightarrow -e < x < e$$

به ازای $x = e$ سری به شکل $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^n$ در می آید. داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^n = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^n e^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} e^n = 1$$

و بنابراین جمله عمومی به سمت صفر میل نکرده و سری واگراست. به ازای $x = -e$ هم با توجه به اینکه جمله عمومی به سمت صفر میل نمی کند سری واگراست. به این ترتیب بازه همگرایی سری عبارت است از $(-e, e)$.

۹-همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ را مشخص کنید.

با توجه به اینکه داریم:

$$\ln(n!) = \ln n + \ln(n-1) + \ln(n-2) + \cdots + \ln 2 + \ln 1 < n \ln n \Rightarrow \frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{\ln(n!)}$$

از سوی دیگر با آزمون انتگرال داریم:

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_{e}^{+\infty}\frac{dt}{t}\qquad x=e^{t},dx=e^{t}dt$$

و بنابراین سری $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$ واگراست و بنابرآنچه بیان شد و با بهره گیری از آزمون مقایسه در می یابیم که سری $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ نیز واگراست.

۱۰-هرگاه $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ باشد، با استفاده از بسط مک لوران تابع $f(x)$ مطلوب است مشتق دهم تابع در نقطه صفر. $f^{(10)}(0)=?$

با توجه به اینکه بسط مک لوران تابع پیوسته و بی نهایت بار مشتق پذیر $g(x)$ عبارت است از:

$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^{n}$$

پس مشتق دهم تابع $f(x)$ در نقطه صفر ضریب $\frac{x^{10}}{10!}$ در بسط تابع $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ است. ازسوی دیگر داریم:

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{1!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!}$$

$$=1+\frac{(-1)}{2\times 1!}x^{2}+\frac{(-1)^2}{2^2\times 2!}x^{4}++\frac{(-1)^3}{2^3\times 3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2^n\times n!}x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

ضریب x^{10} در بسط بالا عبارت است از $\frac{(-1)^5}{2^5\times 5!}=-\frac{1}{3840}$ و بنابراین مقدار مطلوب عبارت است از:

$$\frac{(-1)^5}{2^5\times 5!}\times 10!=-945$$

۱-حاصل عبارت $(1+\sqrt{3}i)^{100}$ را به دست آورید.

با توجه به اینکه داریم: $1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

خواهیم داشت:

$$(1+\sqrt{3}i)^{100} = 2^{100}e^{i\frac{100\pi}{3}} = 2^{100}e^{i\left(32\pi+\frac{5\pi}{3}\right)} = 2^{100}e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2^{100}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2^{100}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

۲- حدهای $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-n}{in+n^2}$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^4}\frac{\sin t dt}{\sqrt{t}}}{x^6}$ را به دست آورید.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-n}{in+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}-1}{\frac{i}{n}+1} = \int_0^1\frac{x-1}{x+1}dx = \int_0^1\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx = 1-2\ln 2$$

در مورد حد دوم از قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال بهره می گیریم. با توجه به اینکه :

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^4}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = 4x^3\frac{\sin x^4}{\sqrt{x}}$$

با بهره گیری از قاعده هوپیتال خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^4}\frac{\sin t dt}{\sqrt{t}}}{x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^3\frac{\sin x^4}{\sqrt{x^4}}}{6x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x^4}{3x^4} = \frac{2}{3}$$

۳- در معادله $(f(x))^2 = \int_0^x\frac{2f(t)}{\sqrt{1+t^2}}dt$ تابع $f(x)$ را با شرط $f\neq 0$ به دست آورید.

با بهره گیری از قضیه اول حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

$$\frac{d}{dx}(f(x))^2 = 2f'(x)f(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x\frac{2f(t)}{\sqrt{1+t^2}}dt = \frac{2f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

و بنابراین $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ و بنابراین $f(x) = \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1}x + C$

۴- انتگرال های زیر را محاسبه کنید:

الف) $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos x dx$ ب) $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$ پ) $\int \sqrt{x^2+1}dx$

الف) با انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos x dx = e^{-x}\sin x\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\sin x dx = -e^{-x}\cos x\Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos x dx$$
$$= 1 - \int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos x dx$$

و به این ترتیب خواهیم داشت

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos x dx = \frac{1}{2}$$

ب) با بهره گیری از برابری زیر از کسرهای جزیی بهره می گیریم:

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{1+x^2}\right)$$
$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx = \ln\sqrt{|1+x|} - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx$$
$$= \ln\sqrt{|1+x|} - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

پ) به سادگی با جایگذاری $x = \sinh\theta$ خواهیم داشت:

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{\sinh^2\theta + 1}\cosh\theta d\theta = \int \cosh^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int (1+\cosh 2\theta)d\theta$$
$$= \frac{\theta}{2} + \frac{\sinh 2\theta}{4} + C = \frac{\sinh^{-1}x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + C$$

ــــ در صورتی که از جانشانی $x = \tan\theta$ بهره بگیریم، خواهیم داشت:

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \int \sec^3\theta d\theta$$

و با انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\int \sec^3\theta d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int (1+\tan^2\theta - 1)\sec\theta d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta d\theta + \int \sec\theta d\theta$$

و در نتیجه:

$$\int \sec^3\theta d\theta = \frac{\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|}{2} + C$$

با توجه به اینکه $x = \tan\theta$ و $\sec\theta = \sqrt{x^2+1}$ خواهیم داشت:

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{x\sqrt{x^2+1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|}{2} + C$$

۵- مطلوب است محاسبه طول قوس خم $x = t^2 - t$ و $y = \frac{4\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}$ از $t = 0$ تا $t = 2$

$x' = 2t - 1$ و $y' = 2\sqrt{2}t^{\frac{1}{2}}$ و بنابراین:

$$L = \int_{0}^{2} \sqrt{8t + 4t^2 - 4t + 1}dt = \int_{0}^{2} (2t+1)dt = 6$$

۶- در مخزنی کروی شکل به شعاع ۱۰ متر تار ارتفاع ۱۲ متر آب ریخته ایم. حجم آب را حساب کنید.
اگر دایره $x^۲+y^۲=۱۰۰$ را حول محور y ها دوران دهیم کره مذکور به دست می آید. برای محاسبه حجم آب بایستی حجم جسم دوار حاصل از دوران دایره فوق را تا $y=۲$ حساب کنیم:

$$\int_{-۱۰}^{۲}\pi x^۲dy=\int_{-۱۰}^{۲}\pi(۱۰۰-y^۲)dy=\pi\left(۱۰۰y-\frac{y^۳}{۳}\right)\Big|_{-۱۰}^{۲}=۸۶۴\pi$$

۷-شعاع همگرایی و فاصله همگرایی سری زیر را به دست آورید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{n}{n+۱}\right)^{n^۲}(۵-۲x)^n$$

از آزمون ریشه بهره می گیریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+۱}\right)^{n^۲}}(۵=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+۱}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)^n=\frac{۱}{e}$$

پس سری در صورتی همگراست که $-e<۵-۲x<e$ یا $\frac{۵-e}{۲}<x<\frac{۵+e}{۲}$.

در نقطه $x=\frac{۵-e}{۲}$ سری به شکل $\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{n}{n+۱}\right)^{n^۲}e^n$ در می آید که با توجه به اینکه جمله عمومی آن به سمت صفر میل نمی کند واگراست. در نقطه $x=\frac{۵+e}{۲}$ هم سری به شکل $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\left(\frac{n}{n+۱}\right)^{n^۲}e^n$ در می آید که بازهم واگراست.

۸- به کمک آزمون انتگرال- سری همگرایی انتگرال زیر را بررسی کنید.

$$\int_{۱}^{\infty}\left(\frac{x+۱}{۳x+۲}\right)^x dx$$

با توجه به اینکه $f(x)=\left(\frac{x+۱}{۳x+۲}\right)^x$ بر $x\ge۱$ پیوسته و نزولی است و $\lim_{x\to\infty}f(x)=۰$ و اگر $f(n)=\left(\frac{n+۱}{۳n+۲}\right)^n$ $\sum_{i=۱}^{\infty}\left(\frac{n+۱}{۳n+۲}\right)^n$ همگرا باشد، $\int_{۱}^{\infty}\left(\frac{x+۱}{۳x+۲}\right)^x dx$ نیز بنابر آزمون انتگرال برای سری ها همگراست. از آزمون ریشه بهره می گیریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+۱}{۳n+۲}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+۱}{۳n+۲}=\frac{۱}{۳}<۱$$

و بنابراین سری $\sum_{i=۱}^{\infty}\left(\frac{n+۱}{۳n+۲}\right)^n$ همگراست و در نتیجه انتگرال مورد بحث نیز همگراست.

۱-اعداد مختلط را که در نامعادله زیر صدق می کنند تعیین کنید (شکل ناحیه را رسم کنید)

$$\left|\frac{۲z-i}{iz+۲}\right|<۱$$

با $z=x+iy$ و با فرض $z\neq ۲i$ رابطه بالا را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\sqrt{(۲x)^۲+(۲y-۱)^۲}<\sqrt{(-y+۲)^۲+x^۲}$$

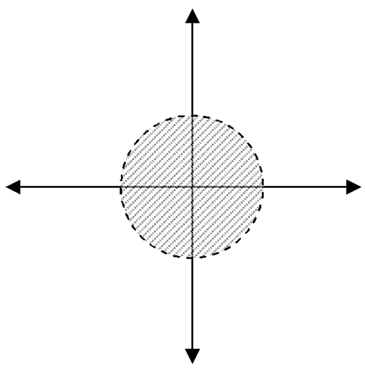
با مجذور کردن دو سوی نابرابری خواهیم داشت:

$$۴x^۲+۴y^۲-۴y+۱<y^۲-۴y+۴+x^۲$$

یا:

$$۳x^۲+۳y^۲<۳$$

بنابراین ناحیه مورد نظر عبارت است از درون دایره $x^۲+y^۲=۱$ یا ناحیه $|z|<۱$.



ـــــ می توانستیم رابطه را به شکل زیر بنویسیم:

$$\left|\frac{۲z-i}{iz+۲}\right|<۱\Rightarrow\left|\frac{z-\frac{i}{۲}}{z-۲i}\right|<\frac{۱}{۲}$$

با توجه به اینکه مکان هندسی نقاطی که نسبت فاصله هایشان از دو نقطه A و B برابر با مقدار ثابت k است دایره ای به شعاع $\left|\frac{k}{۱-k^۲}\right||AB|$ و به مرکز $\left(\frac{x_B-k^۲x_A}{۱-k^۲},\frac{y_B-k^۲y_A}{۱-k^۲}\right)$ است نیز می توان مکان هندسی پرسش را یافت:

$$A=\left(۰,\frac{۱}{۲}\right),B=(۰,۲),|AB|=\frac{۳}{۲},k=\frac{۱}{۲}\Rightarrow R=۱,C=(۰,۰)$$

۲- حدود زیر را بیابید:

الف: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{n\sqrt{n}}\left(\frac{۱}{\sqrt{n+۱}}+\frac{۲}{\sqrt{n+۲}}+\frac{۳}{\sqrt{n+۳}}+\cdots\cdots+\frac{n}{\sqrt{n+n}}\right)$؛

ب: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(۱+\frac{\ln x}{x}\right)^x$.

الف) حد را می توانیم به شکل زیر بنویسیم که یک حاصل جمع ریمانی است:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left(\frac{\frac{۱}{n}}{\sqrt{۱+\frac{۱}{n}}}+\frac{\frac{۲}{n}}{\sqrt{۱+\frac{۲}{n}}}+\frac{\frac{۳}{n}}{\sqrt{۱+\frac{۳}{n}}}+\cdots\cdots+\frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{۱+\frac{n}{n}}}\right)=\int_۰^۱\frac{x}{\sqrt{۱+x}}dx$$

جانشانی $۱+x=t^۲$ را اعمال می کنیم:

$$\int_۰^۱\frac{x}{\sqrt{۱+x}}dx=۲\int_۱^{\sqrt{۲}}(t^۲-۱)dt=\frac{۴-۲\sqrt{۲}}{۳}$$

ب) در اینجا بهترین راه بهره گیری از فرمول $\lim\limits_{\substack{\alpha\to۰\\ \beta\to\infty}}(۱+\alpha)^\beta=e^{\lim\limits_{\substack{\alpha\to۰\\ \beta\to\infty}}\alpha\beta}$ است: با توجه به اینکه

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} x = +\infty$ ، مقدار حد نامتناهی است.

ـــــــــ می توانیم با بهره گیری از خـواص لگـاریتم نیـز حـد را محاسـبه کنـیم: اگـر $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(۱+\frac{\ln x}{x}\right)^x$ موجود باشد، قرار می دهیم: $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(۱+\frac{\ln x}{x}\right)^x$ و بنابراین:

$$\begin{aligned}\ln A &= \ln \lim_{x\to+\infty}\left(۱+\frac{\ln x}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(۱+\frac{\ln x}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(۱+\frac{\ln x}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(۱+\frac{\ln x}{x}\right)}{\frac{۱}{x}}\end{aligned}$$

از قاعده هوپیتال بهره می گیریم:

$$\ln A = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\frac{۱-\ln x}{x^۲}}{\frac{x+\ln x}{x}}}{-\frac{۱}{x^۲}} = -\lim_{x\to+\infty} x\frac{۱-\ln x}{x+\ln x} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x}{۱+\frac{۱}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x+۱} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+۱}{۱} = +\infty$$

و بنابراین مقدار حد نامتناهی است.

۳- انتگرال های زیر را محاسبه کنید:

الف: $\int\frac{xdx}{\sqrt{۳-۴x-۴x^۲}}$؛ ب: $\int x^۲\tan^{-۱} xdx$؛ پ: $\int\frac{dx}{\tan x+\sin x}$.

الف) انتگرال را به دوقسمت تجزیه می کنیم:

$$\begin{aligned}\int\frac{xdx}{\sqrt{۳-۴x-۴x^۲}} &= \frac{-۱}{۸}\int\frac{-۸x-۴}{\sqrt{۳-۴x-۴x^۲}}dx-\frac{۱}{۲}\int\frac{dx}{\sqrt{۳-۴x-۴x^۲}}\\ &= \frac{-\sqrt{۳-۴x-۴x^۲}}{۴}-\frac{۱}{۲}\int\frac{dx}{\sqrt{۳-۴x-۴x^۲}}\end{aligned}$$

انتگرال دوم را هم محاسبه می کنیم:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{۳-۴x-۴x^۲}} = \frac{۱}{۲}\int\frac{dx}{\sqrt{۱-\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۲}} = \frac{۱}{۲}\sin^{-۱}\left(x-\frac{۱}{۲}\right)$$

بنابراین:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{۳-۴x-۴x^۲}} = \frac{-\sqrt{۳-۴x-۴x^۲}}{۴}-\frac{۱}{۴}\sin^{-۱}\left(x-\frac{۱}{۲}\right)+C$$

ـــــ با جانشانی اویلر نیز می توان مساله را حل کرد (با اینکه محاسبات پیچیده تری لازم دارد). قرار می دهیم $\sqrt{-۴x^۲-۴x+۳} = \sqrt{۳}+xt$ و بنابراین:

$$-x^۲(۴+t^۲)-x\left(۴+۲\sqrt{۳}t\right) = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۴+۲\sqrt{۳}t}{۴+t^۲} \Rightarrow dx = ۲\frac{\sqrt{۳}t^۲+۴t-۴\sqrt{۳}}{\left(۴+t^۲\right)^۲}dt$$

ب) نخست از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می کنیم:

$$\int x^{۲}\tan^{-۱}x dx = \frac{x^{۳}\tan^{-۱}x}{۳}-\frac{۱}{۳}\int\frac{x^{۳}dx}{۱+x^{۲}}$$
$$=\frac{x^{۳}\tan^{-۱}x}{۳}-\frac{۱}{۳}\int\left(x-\frac{x}{۱+x^{۲}}\right)dx=\frac{x^{۳}\tan^{-۱}x}{۳}-\frac{x^{۲}}{۶}+\frac{\ln\sqrt{۱+x^{۲}}}{۳}+C$$

برای محاسبه انتگرال $\frac{۱}{۳}\int\frac{x^{۳}dx}{۱+x^{۲}}$ می توانیم جانشانی $x=\tan\theta$ را نیز اعمال کنیم:

$$\int\frac{x^{۳}dx}{۱+x^{۲}}=\int\tan^{۳}\theta d\theta=\int\tan\theta\left(\sec^{۲}\theta-۱\right)d\theta=\frac{\tan^{۲}\theta}{۲}-\ln\sec\theta$$

که با توجه به اینکه $\sec\theta=\sqrt{۱+x^{۲}}$ خواهیم داشت:

$$\int\frac{x^{۳}dx}{۱+x^{۲}}=\frac{x^{۲}}{۲}-\ln\sqrt{۱+x^{۲}}$$

پ) جانشانی $t=\tan\frac{x}{۲}$ را اعمال می کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$dx=\frac{۲dt}{۱+t^{۲}} \quad \text{و} \quad \tan x=\frac{۲t}{۱-t^{۲}} \quad \text{و} \quad \sin x=\frac{۲t}{۱+t^{۲}}$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\int\frac{dx}{\tan x+\sin x}=\int\frac{(۱-t^{۲})dt}{۴t}=\frac{\ln t}{۴}-\frac{t^{۲}}{۸}+C$$
$$=\frac{۱}{۴}\ln\tan\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۸}\tan^{۲}\frac{x}{۲}+C$$

۴- فقط به یکی از دو قسمت الف یا ب پاسخ دهید:

الف: طول منحنی $y=\ln\cos x$ را از $x=\frac{\pi}{۶}$ تا $x=\frac{\pi}{۴}$ بیابید.

ب: به کمک قضیه پاپوس حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به دایره $(x-a)^{۲}+(y-a)^{۲}=a^{۲}$ حول محور y را به دست بیاورید.

الف) با توجه به اینکه $y'=-\tan x$ داریم:

$$\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}}\sqrt{۱+\tan^{۲}x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}}\sec x dx=\ln\left(\sec x+\tan x\right)\Big|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}}=\ln\left(\sqrt{۲}+۱\right)-\ln\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)$$

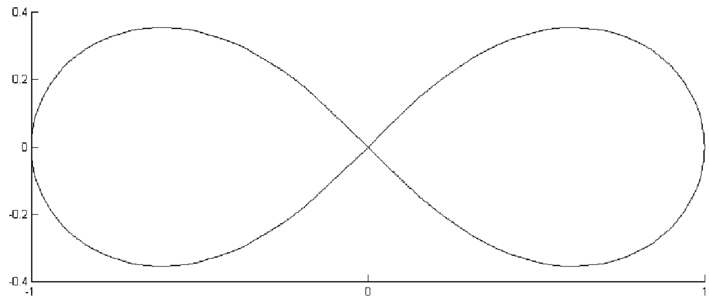
ب) مرکز گون دایره نقطه (a,a) است و با توجه به اینکه در دوران حول محور عرض ها دایره ای به شعاع a را می پیماید، مسیر طی شده عبارت است از $۲\pi a$. مساحت دایره نیز برابر با $\pi a^{۲}$ است و بنابراین داریم:

$$V=۲\pi a\times\pi a^{۲}=۲\pi^{۲}a^{۲}$$

۵- منحنی به معادله قطبی $r^{2} = \cos 2\theta$ را رسم کنید.

دامنه تابع به وضوح نقاطی است که $\cos 2\theta \geq 0$ یا $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. از سوی دیگر اگر نقطه (r,θ) بر منحنی باشد، به سادگی دیده می شود که نقاط $(r,-\theta)$ و $(-r,\theta)$ نیز بر نمودار منحنی قرار دارند و بنابراین نمودار منحنی نسبت به محور قطبی و قطب متقارن است. پس کافی است نمودار منحنی را در یک هشتم اول مختصات دکارتی رسم کرده و با بهره گیری از تقارن بقیه نمودار را بکشیم. نمودار منحنی که یک لم نیسکات است در زیر رسم شده است:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r	± 1	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	0



۶- همگرایی یا واگرایی سری و انتگرال زیر را تعیین کنید.

الف: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^{2}}$؛ ب: $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^{2}}}$.

الف) با بهره گیری از آزمون ریشه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^{2}}} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = e^{-1} < 1$$

و بنابراین سری همگراست.

ب) ناسره گی انتگرال در دو سر بازه انتگرال گیری است. در $x = 0$ از آزمون مقایسه بهره می گیریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x\sqrt{1-x^{2}}}}{\frac{1}{x^{p}}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

دیده می شود که اگر $p = 1$ آنگاه مقدار حد به سمت عددیک میل می کند و بنابراین انتگرال مورد نظر در کران پایینش رفتاری مشابه با $\int_{0}^{a}\frac{dx}{x}$ خواهد داشت یعنی انتگرال همگرا نیست. به این ترتیب دیگر لازم نیست که همگرایی انتگرال در $x = 1$ بررسی شود.

۷- بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n n}$ را به دست آورید.

با بهره گیری از آزمون نسبت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}}{\frac{(x+1)^n}{2^n n}}\right| = |x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{|x+1|}{2}$$

برای اینکه سری همگرا باشد، بایستی $\left|\frac{x+1}{2}\right| < 1$ یعنی $-3 < x < 1$. در نقطه $x=1$ سری به شکل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ در می آید که واگراست و در نقطه $x=-3$ سری به شکل متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ در می آید که همگراست و بنابراین بازه همگرایی سری عبارت است از $[-3,1)$.

۸- سری تیلور تابع $f(x)=(x-1)e^x$ را حول $x_0=1$ به دست آورید.

قرار می دهیم $u=x-1$. مساله تبدیل به بسط ue^{u+1} حول صفرمی شود. با توجه به اینکه:

$$e^u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}\Rightarrow ue^{u+1}=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{n+1}}{n!}$$

خواهیم داشت:

$$(x-1)e^x=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{n!}$$

۱- معادله $z^{۴}-۸iz^{۲}-۲۵=۰$ را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید.

یک معادله درجه دو برحسب $z^{۲}$ داریم و بنابراین:

$$z^{۲}=۴i\pm\sqrt{-۱۶+۲۵}=۴i\pm۳$$

بنابراین اگر $\theta_{۱}=\tan^{-۱}\frac{۴}{۳}$ خواهیم داشت:

$$z=(-۳+۴i)^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۵}e^{\frac{۲k\pi+\pi-\theta_{۱}}{۲}}\qquad k=۰,۱\qquad \text{و}\qquad z=(۳+۴i)^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۵}e^{\frac{۲k\pi+\theta_{۱}}{۲}}\qquad k=۰,۱$$

به این ترتیب ریشه های معادله به شکل زیر خواهند بود:

$$\sqrt{۵}\left(\cos\frac{\theta_{۱}}{۲}+\sin\frac{\theta_{۱}}{۲}\right)\qquad \sqrt{۵}\left(\cos\left(\pi+\frac{\theta_{۱}}{۲}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\theta_{۱}}{۲}\right)\right)$$

$$\sqrt{۵}\left(\cos\frac{\pi-\theta_{۱}}{۲}+\sin\frac{\pi-\theta_{۱}}{۲}\right)\qquad \sqrt{۵}\left(\cos\frac{\pi+\theta_{۱}}{۲}+\sin\frac{\pi+\theta_{۱}}{۲}\right)$$

نکته: برای به دست آوردن ریشه ها می توانیم از روشی دیگر نیز بهره بگیریم. اگر $z=x+iy$ آنگاه $z^{۲}=x^{۲}-y^{۲}+۲ixy$. با توجه به مقادیر به دست آمده برای $z^{۲}$ به دو دستگاه زیر می رسیم:

$$\begin{cases}x^{۲}-y^{۲}=۳\\ ۲xy=۴\end{cases}\qquad \text{و}\qquad \begin{cases}x^{۲}-y^{۲}=-۳\\ ۲xy=۴\end{cases}$$

ترکیب های جواب های حقیقی این دو دستگاه ریشه های معادله را می سازند:

$$۱+۲i\quad -۱-۲i\quad ۲+i\quad -۲-i$$

۲- حدود زیر را بیابید:

الف: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n+۲}+\cdots+\sqrt{n+n}}{n^{۳/۲}}\right)$؛ ب: $\lim\limits_{x\to۰^{+}}\left(۱+\tanh^{۲}\sqrt{x}\right)^{\frac{۱}{x}}$.

الف) با ساده کردن عبارات داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n+۲}+\cdots+\sqrt{n+n}}{n^{۳/۲}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left(\sqrt{۱+\frac{۱}{n}}+\sqrt{۱+\frac{۲}{n}}+\cdots+\sqrt{۱+\frac{n}{n}}\right)$$

که یک حاصل جمع ریمانی است و می توان آن را به شکل انتگرال زیر در نظر گرفت:

$$\int_{۰}^{۱}\sqrt{۱+x}dx=\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}-\frac{۲}{۳}$$

ب) قرار می دهیم: $A=\lim\limits_{x\to۰^{+}}\left(۱+\tanh^{۲}\sqrt{x}\right)^{\frac{۱}{x}}$ و بنابراین:

$$\ln A=\ln\left(\lim_{x\to۰^{+}}\left(۱+\tanh^{۲}\sqrt{x}\right)^{\frac{۱}{x}}\right)=\lim_{x\to۰^{+}}\ln\left(۱+\tanh^{۲}\sqrt{x}\right)^{\frac{۱}{x}}==\lim_{x\to۰^{+}}\frac{۱}{x}\ln\left(۱+\tanh^{۲}\sqrt{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to۰^{+}}\frac{\ln\left(۱+\tanh^{۲}\sqrt{x}\right)}{x}=\lim_{x\to۰^{+}}\frac{\frac{\operatorname{sec}h^{۲}\sqrt{x}\tanh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{۱+\tanh^{۲}\sqrt{x}}=۱$$

و بنابراین $A=e$.

نکته: می توانیم از رابطه $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to\infty}} (1+\alpha)^{\beta} = e^{\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to\infty}}\alpha\beta}$ نیز مساله را حل کنیم:

با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\tanh^2\sqrt{x}}{x} = 1$ خواهیم داشت: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\tanh^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^1$.

۳- انتگرال های زیر را محاسبه کنید:

الف: $\int \frac{\sin(\ln x)}{x^2}dx$؛ ب: $\int \frac{3x^2-9}{x^3-9x}dx$؛ پ: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

الف) قرار می دهیم $\ln x = u$ و $x = e^u$ و $dx = e^u du$ و بنابراین:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(\ln x)}{x^2}dx &= \int e^{-u}\sin u\,du = -e^{-u}\sin u + \int e^{-u}\cos u\,du = \\ &= -e^{-u}\sin u - e^{-u}\cos u - \int e^{-u}\sin u\,du \\ &= -\frac{\cos\ln x + \sin\ln x}{x} - \int \frac{\sin(\ln x)}{x^2}dx\end{aligned}$$

و بنابراین:
$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x^2}dx = -\frac{\cos\ln x + \sin\ln x}{2x} + C$$

ب)
$$\int \frac{3x^2-9}{x^3-9x}dx = \ln\left(x^3-9x\right)+C$$

پ) قرار می دهیم: $x = \tan t$ و $dx = \sec^2 t\,dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\sec^2 t}{\tan t\sec t}dt = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\csc t - \cot t\right| + C$$

با توجه به اینکه $x = \tan t$ خواهیم داشت $\cot t = \frac{1}{x}$ و $\csc t = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. بنابراین:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \frac{1}{x}\right| + C$$

اگر قرار می دادیم: $x = \sinh t$ آنگاه داشتیم: $dx = \cosh t\,dt$ و

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dt}{\sinh t} = \ln\left|\coth t - \csc ht\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right| + C$$

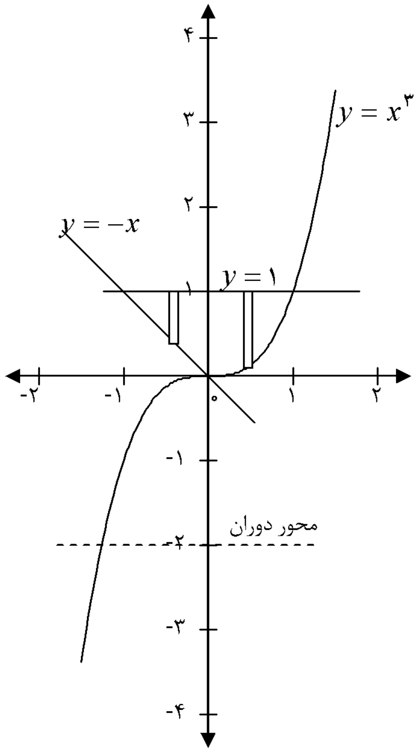
___ با توجه به اینکه انتگرالده به شکل دیفرانسیل دوجمله ای $x^{-1}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ است و $\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{2} = 0$ می توانیم از جانشانی $1+x^2 = t^2$ نیز بهره بگیریم. در این صورت $x = \sqrt{t^2-1}$ و $dx = \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}$ و :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dt}{(t^2-1)} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\sqrt{\left|\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|} + C = \ln\left|\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C$$

۴-فقط به یکی از دو قسمت الف یا ب پاسخ دهید.

الف- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به $y=x^{۳}$ و $y=-x$ و $y=۱$ حول خط $y=-۲$ رابیابید.

ب- بـه کمـک قضـیه پـاپوس مرکـزوار ناحیـه $x^{۲}+y^{۲}\le a^{۲}$ و $x\ge ۰$ و $y\ge ۰$ را به دست آورید.

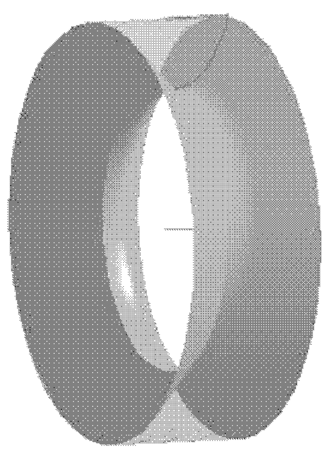


الف) همان طور که درشکل دیده می شود برای محاسـبه حجـم حاصل با روش واشر بایستی ناحیه انتگرال گیری را به دو قسمت تقسیم کنیم. بنابراین بایستی مجموع دو انتگرال زیر را محاسـبه کنیم:

$$\pi\int_{۰}^{۱}\left(۳^{۲}-(x^{۳}+۲)^{۲}\right)dx+\pi\int_{-۱}^{۰}\left(۳^{۲}-(-x+۲)^{۲}\right)dx=\frac{۱۳۷\pi}{۲۱}$$

- با بهره گیری از روش غشا نیز می توان به جواب رسید:

$$۲\pi\int_{۰}^{۱}\left(\sqrt[۳]{y}+y\right)(y+۲)dy=\frac{۱۳۷\pi}{۲۱}$$



ب- با دوران ناحیه $x^{۲}+y^{۲}\le a^{۲}$ و $x\ge ۰$ و $y\ge ۰$ به یک نیمکره به شعاع a می رسیم که حجم آن برابـر با $\frac{۲}{۳}\pi a^{۳}$ خواهد بود. بنا بر قضیه پاپوس حجم حاصل از دوران برابر است با مساحت ناحیه ای که دوران مـی کند ضرب در طول مسیری که مرکزوار ناحیه می پیماید، با توجه به اینکه مساحت ناحیه برابر است بـا $\frac{\pi a^{۲}}{۴}$ و حجم نیم کره نیز $\frac{۲}{۳}\pi a^{۳}$ است، با l فاصله مرکزوار از محور دوران خواهیم داشت:

$$\frac{۲}{۳}\pi a^{۳}=۲\pi l\frac{\pi a^{۲}}{۴}\Rightarrow l=\frac{۴a}{۳\pi}$$

با توجه به اینکه بحث فوق چه برای دوران حول محور x ها و چه برای دوران حول محور y ها صـادق اسـت؛

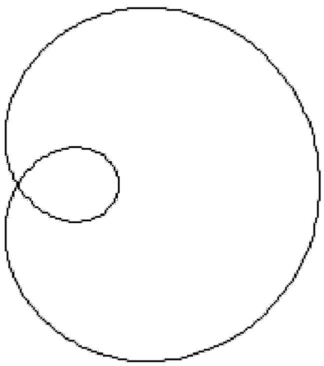
بنابراین فاصله مرکزوار ناحیه از هر دومحور برابر با $\frac{۴a}{۳\pi}$ است. و بنابراین مرکز وار ناحیــه نقطــه $\left(\frac{۴a}{۳\pi},\frac{۴a}{۳\pi}\right)$ است.

اگر بخواهیم سرراست مختصات مرکز وار را محاسبه کنیم با توجه به اینکه داریم:

$$A=\frac{\pi a^۲}{۴} \text{ و } M_y=\int_۰^a x\sqrt{a^۲-x^۲}dx=\frac{a^۳}{۳} \text{ و } M_x=\int_۰^a \frac{a^۲-x^۲}{۲}dx=\frac{a^۳}{۳}$$

و بنابراین: $\bar{x}=\frac{M_y}{A}=\frac{۴a}{۳\pi}$ و $\bar{y}=\frac{M_x}{A}=\frac{۴a}{۳\pi}$.

۵- منحنی به معادله قطبی $r=۱+۲\cos\theta$ را رسم کنید.



با توجه به اینکه $۱+۲\cos(-\theta)=۱+۲\cos\theta$ منحنی نسبت بـه محـور قطبی متقارن است. بنابراین کافی است، منحنی را بـه ازای $۰\le\theta\le\pi$ رسم کنیم و سپس قرینه نمودار رسم شده را نسبت محور قطبـی رسـم کنیم.

θ	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π
r	۳	$۱+\sqrt{۳}$	$۱+\sqrt{۲}$	۲	۱	۰	$۱-\sqrt{۲}$	$۱-\sqrt{۳}$	-۱

نمودار تابع در روبرو رسم شده است:

۶- همگرایی و واگرایی سری و انتگرال زیر را بررسی کنید.

الف: $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱+n!}{(n+۱)!}$؛ ب: $\int_۰^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^۳}}$.

الف) سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱+n!}{(n+۱)!}$ را می توان به شکل حاصل جمـع دو سـری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n+۱)!}$ و $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n!}{(n+۱)!}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n+۱}$ نوشت که اولی همگرا و دومی واگراست و بنابراین سری حاصل جمع هم واگرا خواهد بود.

می توانیم از آزمون مقایسه حدی نیز بهره بگیریم و با توجه به اینکـه $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۱+n!}{(n+۱)!}}{\frac{۱}{n}}=۱$ سـری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱+n!}{(n+۱)!}$ با سری همساز یک رفتار دارد و واگراست.

ب) انتگرال در دونقطه ناسره گی دارد. از آزمون مقایسه حدی بهره می گیریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۱}{\sqrt{x+x^۳}}}{\frac{۱}{x^p}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\sqrt{x+x^۳}}$$

دیده می شود که اگر $p=\frac{۳}{۲}$ حد فوق برابر با یک است و با توجه به همگرا بـودن انتگـرال $\int_۱^{\infty}x^{-\frac{۳}{۲}}dx$ اولـین انتگرال همگراست. از سوی دیگر

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{\sqrt{x+x^۳}}}{\frac{۱}{x^p}}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^p}{\sqrt{x+x^۳}}$$

باز هم دیده می شود که اگر $p=\frac{۱}{۲}$ حد فوق برابر با یک است و بنابراین با توجه به همگرا بـودن $\int_۰^۱ x^{-\frac{۱}{۲}}dx$ ، انتگرال دوم هم همگراست. بنابراین انتگرال $\int_۰^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^۳}}$ همگراست.

همچنین می توانیم جانشانی $t^۲=x$ را اعمال کنیم: $\int_۰^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^۳}}=۲\int_۰^\infty \frac{dt}{\sqrt{۱+t^۴}}$

و انتگرال حاصل به وضوح همگراست.

۷- بازه همگرایی سری $\sum_{b=۲}^\infty \frac{(x-۱)^n}{n\ln n}$ را به دست آورید.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-۱)^{n+۱}}{(n+۱)\ln(n+۱)}}{\frac{(x-۱)^n}{n\ln n}}\right|=|x-۱|\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{(n+۱)\ln(n+۱)}=|x-۱|$$

برای اینکه سری همگرا باشد، بایستی $|x-۱|<۱$ یا $۰<x<۲$.

به ازای $x=۰$ سری به شکل $\sum_{b=۲}^\infty \frac{(-۱)^n}{n\ln n}$ در می آید که یک سری متناوب با دنبالـه جمـلات نزولـی اسـت و همگـرا. بـه ازای $x=۲$ سـری بـه شـکل $\sum_{b=۲}^\infty \frac{۱}{n\ln n}$ در مـی آیـد کـه بـا اعمـال آزمـون انتگـرال داریـم: $\int_۲^\infty \frac{dx}{x\ln x}=\int_{\ln ۲}^\infty \frac{du}{u}$ که واگراست. بنابراین بازه همگرایی سری عبارت است از $[۰,۲)$.

۸- سری مکلورن تابع $f(x)=\frac{x-۲}{x^۲+x-۲}$ را به دست آورید.

با توجه به اینکه $\frac{x-۲}{x^۲+x-۲}=\frac{۴}{۳}\frac{۱}{x+۲}-\frac{۱}{۳}\frac{۱}{x-۱}$ کافی است سری ماک لوران دوکسر را بنویسیم:

$$\frac{۱}{۱-x}=۱+x+x^۲+\cdots=\sum_{n=۰}^\infty x^n$$

که این سری به ازای $|x|<۱$ همگراست.

از سوی دیگر مشتقات متوالی تابع $\frac{۱}{x+۲}$ عبارت است از:

$$-\frac{۱}{(x+۲)^۲} \text{ و } (-۱)^۲\frac{۲}{(x+۲)^۳} \text{ و } (-۱)^۳\frac{۳!}{(x+۲)^۴} \text{ و .... و } (-۱)^n\frac{n!}{(x+۲)^{n+۱}}$$

و بنابراین سری ماک لوران تابع $\frac{۱}{x+۲}$ به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}x+(-1)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}x^{2}+\cdots+(-1)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}x^{n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}x^{n}$$

به این ترتیب:

$$\frac{x-2}{x^{2}+x-2}=\frac{4}{3}\frac{1}{x+2}+\frac{1}{3}\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+1}{3}x^{n}$$

۱- معادله زیر را حل کنید:

$$z^5=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$$

داریم:

$$z^5=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{2}\,\frac{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\,\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

و بنابراین:

$$z=\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{2k\pi+\frac{\pi}{12}}{5}}\quad,\quad k=0,1,2,3,4$$

پس $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{60}+i\sin\frac{\pi}{60}\right)$ و $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{60}+i\sin\frac{25\pi}{60}\right)$ و $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{49\pi}{60}+i\sin\frac{49\pi}{60}\right)$ و $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{73\pi}{60}+i\sin\frac{73\pi}{60}\right)$ و $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{97\pi}{60}+i\sin\frac{97\pi}{60}\right)$ ریشه های مورد نظر هستند.

۲- حدود زیر را بیابید.

الف- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{1389}}{e^x}$ ؛ ب- $\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)^{\cot x}$ ؛ پ- $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^2+n^2}{n^3}$ ؛ ت- $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\int_0^x\left[e-(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]dt}{\frac{1}{2}x^2}$.

الف- با توجه به اینکه $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}>\frac{x^{1390}}{1390!}$ به ازای هر n خواهیم داشت: $\frac{1390!}{x}<\frac{1390!\,x^{1389}}{x^{1390}}<\frac{x^{1389}}{e^x}$.

اما حد مورد نظر ما منفی نیست و از $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1390!}{x}=0$ بیشتر نیست. یعنی $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{1389}}{e^x}=0$.

ـ می توانیم با بهره گیری از قاعده هوپیتال نیز حد مورد نظر را بیابیم. با ۱۳۸۹ بار اعمال قاعده هوپیتال به حد $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1389!}{e^x}=0$ می رسیم.

ب- اگر $\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)^{\cot x}=A$ موجود باشد، با توجه به اینکه $(x+1)^{\cot x}$ به ازای هر $x>0$ مثبت خواهد بود و بنابراین A نیز عددی مثبت است، $\ln A$ را با بهره گیری از این حکم که تابع $\ln$ بر اعداد مثبت پیوسته است و در نتیجه می توان جای حد و تابع را عوض کرد، می یابیم.

$$\begin{aligned}\ln A&=\ln\lim_{x\to0^+}(x+1)^{\cot x}\\&=\lim_{x\to0^+}\ln(x+1)^{\cot x}=\lim_{x\to0^+}\cot x\ln(x+1)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{\tan x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{\sec^2 x}=1\end{aligned}$$

در آخر کار از قاعده هوپیتال کمک گرفته ایم. با توجه به اینکه $\ln A=1$ در می یابیم که $A=e$.

پ- داریم:
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2+n^2}{n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+1\right]$$

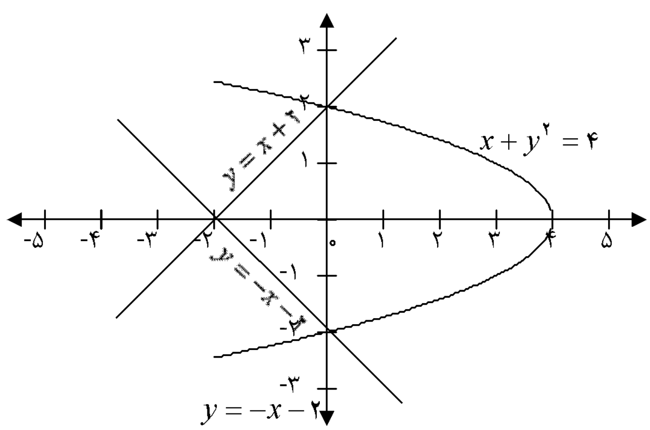
حد فوق حاصل جمع ریمـان افـراز $\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\ldots\ldots,\frac{n-1}{n},1\right\}$ از بـازه $[0,1]$ بـه ازای تـابع x^2+1اسـت و بنابراین برابر است با:
$$\int_0^1(x^2+1)dx=\frac{4}{3}$$

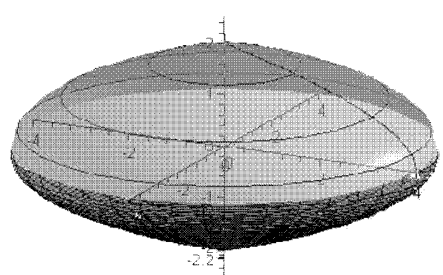
ـ می توانیم با توجه به $\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ نیز مساله را به شکل زیر حل کنیم:
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2+n^2}{n^3}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}+1\right)=\frac{4}{3}$$

ت- از قاعده هوپیتال و قضیه اساس حساب دیفرانسیل و انتگرال بهره می گیریم:
$$A=\lim_{x\to0^-}\frac{\int_0^x\left[e-(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]dt}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{\ln(1+x)}{x^2}-\frac{1}{x(x+1)}\right](1+x)^{\frac{1}{x}}$$

در اینجا با توجه به اینکه داریم: $\lim_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ می نویسیم:
$$A=e\lim_{x\to0^-}\frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x^2(x+1)}=e\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+x)}{3x^2+2x}=e\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{x+1}}{6x+2}=\frac{e}{2}$$

۳- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی های $x-|y|+2=0$ و $x+y^2=4$ را حول محور y هـا به دست آورید.





شکل ناحیه مورد نظر و همچنین حجم حاصل از دوران در بالا رسم شده است. نخست با مقایسه شعاع هـای چرخش داریم:
$$(4-y^2)-(y-2)=-y^2-y+6$$

ایران پور

که به ازای $-۲ \le y \le ۲$ همیشه مثبت است . بنابراین حجم ناشی از دوران خط های $x-|y|+۲=۰$ در درون حجم حاصل از دوران منحنی $x+y^۲=۴$ قرار می گیرد و کافی است حجم حاصل از دوران این منحنی را بیابیم:

روش دیسک:
$$\pi\int_{-۲}^{۲}\left(۴-y^۲\right)^۲dy=\pi\left(۱۶y-۸\frac{y^۳}{۳}+\frac{y^۵}{۵}\right)\Bigg|_{-۲}^{۲}=\frac{۵۱۲\pi}{۵}$$

روش غشاء
$$۲\pi\int_۰^۴ ۲x\sqrt{۴-x}dx=۴\pi\int_۰^۴ x\sqrt{۴-x}dx=۸\pi\int_۰^۲(۴-t^۲)t^۲dt=۸\pi\left(\frac{۴t^۳}{۳}-\frac{t^۵}{۵}\right)\Bigg|_۰^۲=\frac{۵۱۲\pi}{۱۵}$$

۴- انتگرال های زیر را حل کنید:

الف- $\int\sin x\ln\tan xdx$ ؛ ب- $\int_۰^۱\sqrt{|۲x-۱|+x}$ ؛ پ- $\int_۱^{\sqrt{۲}}\frac{dx}{x^۳\sqrt{۹x^۲-۹}}$ ؛ ت- $\int_{e^۲}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x(\ln x-۱)}$.

الف- با بهره گیری از روش جزء به جزء و $u=\ln\tan x$ و $dv=\sin xdx$ انتگرال را حل می کنیم:

$$\begin{aligned}\int\sin x\ln\tan xdx &=-\cos x\ln\tan x+\int\frac{\cos x\sec^۲x}{\tan x}dx=-\cos x\ln\tan x+\int\frac{dx}{\sin x}\\&=-\cos x\ln\tan x+\ln|\cot x-\csc x|+C\end{aligned}$$

همچنین می توانیم با جانشانی $\sin x=\frac{۲t}{۱+t^۲}$ و $dx=\frac{۲dt}{۱+t^۲}$ انتگرال دوم را به شکل زیر حل کنیم:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln\tan\frac{x}{۲}+C$$

ب- با توجه به شکل انتگرالده، انتگرال را به دو قسمت تقسیم می کنیم:

$$\begin{aligned}\int_۰^۱\sqrt{|۲x-۱|+x}dx &=\int_۰^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{۱-x}dx+\int_{\frac{۱}{۲}}^۱\sqrt{۳x-۱}dx\\&=-\frac{۲}{۳}\sqrt{(۱-x)^۳}\Big|_۰^{\frac{۱}{۲}}+\frac{۲}{۹}\sqrt{(۳x-۱)^۳}\Big|_{\frac{۱}{۲}}^۱=\frac{۲}{۳}+\frac{۲\sqrt{۲}}{۹}\end{aligned}$$

پ- یک راه ساده جایگذاری $x=\sec t$ و $dx=\sec t\tan tdt$ است:

$$\int_۱^{\sqrt{۲}}\frac{dx}{x^۳\sqrt{۹x^۲-۹}}=\frac{۱}{۳}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\sec t\tan tdt}{\sec^۳t\tan t}=\frac{۱}{۳}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\cos^۲tdt=\frac{۱}{۶}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}(۱+\cos ۲t)dt=\frac{\pi}{۲۴}+\frac{۱}{۱۲}$$

ت- جایگذاری $\ln x=t$ یا $x=e^t$ و $dx=e^tdt$ را اعمال می کنیم:

$$\int_{e^۲}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x(\ln x-۱)}=\int_۲^{\infty}\frac{dt}{t(t-۱)}$$

اکنون روش کسرهای جزیی را به کار می گیریم:

$$\int_۲^{\infty}\frac{dt}{t(t-۱)}=-\int_۲^{\infty}\frac{dt}{t}+\int_۲^{\infty}\frac{dt}{t-۱}=\ln\left|\frac{t-۱}{t}\right|_۲^{\infty}=\ln\left|۱-\frac{۱}{t}\right|_۲^{\infty}=-\ln\frac{۱}{۲}=\ln ۲$$

۵- همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{1\times 4\times 7\times\cdots\times(3n-2)}$$

از آزمون نسبت بهره می گیریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1)}{1\times 4\times 7\times\cdots\times(3n-2)\times(3n+1)}}{\dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{1\times 4\times 7\times\cdots\times(3n-2)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\frac{2}{3}<1$$

بنابراین سری همگراست.

۶- بازه همگرایی سری زیر را تعیین کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2}(\log_2 x)^n$$

از آزمون نسبت بهره می گیریم:

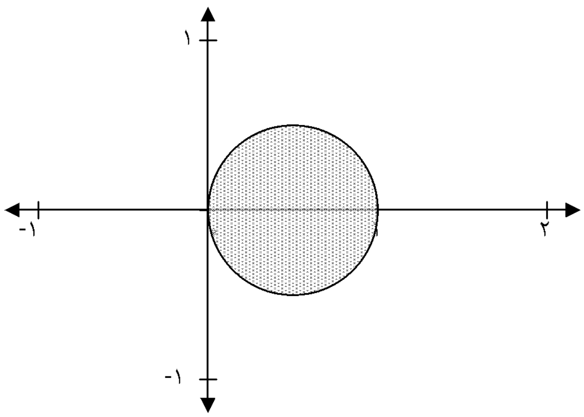
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\dfrac{n+2}{n+1}(\log_2 x)^{n+1}}{(-1)^n\dfrac{n+1}{n}(\log_2 x)^n}\right|=|\log_2 x|\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=|\log_2 x|$$

برای اینکه $|\log_2 x|<1$ بایستی $-1<\log_2 x<1$ یا $\frac{1}{2}<x<2$.

از سوی دیگر در $x=2$ سری به شکل متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2}$ در می آید که همگراست. در $x=\frac{1}{2}$ سری به شکل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$ در می آید که با توجه به $\frac{n+1}{n^2}>\frac{1}{n}$ بنابر آزمون مقایسه واگراست. بنابراین بازه همگرایی سری به شکل $\frac{1}{2}<x\le 2$ است.

۱- ناحیه $\operatorname{Re}\left(\frac{۱}{z}\right) > ۱$ چه قسمتی از صفحه مختلط را نشان می دهد؟ (با رسم شکل)

اگر $z = x + iy$ آنگاه $\operatorname{Re}\left(\frac{۱}{z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x - iy}{x^۲ + y^۲}\right) = \frac{x}{x^۲ + y^۲}$ و بنابراین ناحیه مورد نظر عبارت است از مجموعه نقاط (x, y) در صفحه که به ازای آن ها داشته باشیم: $\frac{x}{x^۲ + y^۲} > ۱$. اگر با جابجا کردن عبارات نابرابری را به شکل $\left(x - \frac{۱}{۲}\right)^۲ + y^۲ < \frac{۱}{۴}$ بنویسیم ناحیه مورد نظر که دایره به مرکز $\left(\frac{۱}{۲}, ۰\right)$ و به شعاع یک دوم است، معین می شود.



۲-ثابت کنید اگر $x > ۰$ آنگاه $\ln(۱ + x^۲) < x$.

آ-تابع $f(x) = x - \ln(۱ + x^۲)$ را تشکیل می دهیم. خواهیم داشت: $f'(x) = ۱ - \frac{۲x}{۱ + x^۲}$. با توجه به رابطه:

$$(۱ - x)^۲ > ۰ \Rightarrow \frac{۲x}{۱ + x^۲} < ۱$$

در می یابیم که به ازای $x > ۰$ داریم $f'(x) > ۰$ و بنابراین تابع روی $(۰, \infty)$ صعودی است و نقطه $x = ۰$ یک نقطه مینیمم تابع است و $f(۰) = ۰$ بنابراین به ازای هر $x > ۰$ داریم $f(x) > ۰$ یعنی $\ln(۱ + x^۲) < x$.

ب- می توانیم از قضیه مقدار میانگین با تابع $f(x) = \ln(۱ + x^۲)$ هم برای اثبات رابطه بهره بگیریم:

$$\frac{\ln(۱ + x^۲) - \ln(۱ + ۰^۲)}{x - ۰} = \frac{۲c}{۱ + c^۲} \qquad ۰ < c < x$$

با توجه به رابطه $(۱ - c)^۲ \geq ۰ \Rightarrow \frac{۲c}{۱ + c^۲} \leq ۱$ رابطه بالا به شکل زیر در می آید:

$$\frac{\ln((۱ + x^۲)}{x} = \frac{۲c}{۱ + c^۲} \leq ۱ \Rightarrow \ln(۱ + x^۲) \leq x$$

که تساوی تنها برای حالت $c = ۱$ است که هیچگاه پیش نمی آید(چرا؟).

۳- حدود زیر را محاسبه کنید:

الف: $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

برای محاسبه این حد قرار می دهیم: $A=\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$. با توجه به اینکه این حد در صورت وجود عددی مثبت خواهد بود، لگاریتم حد را محاسبه می کنیم:

$$\ln A=\ln \lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+} \ln \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}$$

در اینجا با بهره گیری از قاعده هوپیتال داریم:

$$\ln A=\lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین :

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

ب: $\lim\limits_{n\to +\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^3}+\frac{2n}{(n+2)^3}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{(n+n)^3}\right)$.

این حد را به شکل حاصل جمع ریمانی نوشته و به انتگرال تبدیل می کنیم:

$$\lim_{n\to +\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{(n+k)^3}=\lim_{n\to +\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^3}=\int_0^1\frac{xdx}{(1+x)^3}$$

برای محاسبه این انتگرال از روش جزء به جزء بهره می گیریم:

$$\int_0^1\frac{xdx}{(1+x)^3}=-\frac{x}{2(1+x)^2}\Bigg|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1=\frac{1}{8}$$

۴-انتگرال های زیر را محاسبه کنید:

الف: $\int x\sinh^{-1} x dx$.

قرار می دهیم $t=\sinh^{-1} x$ و بنابراین $x=\sinh t$ و $dx=\cosh t$ و انتگرال به شکل زیر در می آید:

$$\int x\sinh^{-1} x dx=\int t\sinh t\cosh t dt=\frac{1}{2}\int t\sinh 2t dt$$

حال روش جزء به جزء را برای این انتگرال به کار می گیریم:

$$\frac{1}{2}\int t\sinh 2t dt=\frac{1}{4}t\cosh 2t-\frac{1}{4}\int \cosh 2t dt=\frac{1}{4}t\cosh 2t-\frac{1}{8}\sinh 2t$$

با توجه به اینکه $x=\sinh t$ خواهیم داشت $\sinh 2t=2x\sqrt{1+x^2}$ و $\cosh 2t=1+2x^2$ و بنابراین:

$$\int x\sinh^{-1} x dx=\frac{\sinh^{-1} x}{4}(1+2x^2)-\frac{1}{4}x\sqrt{1+x^2}+C$$

ب: $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-a^2\right)^3}}$

قرار می دهیم: $x=a\sec u$ و بنابراین $dx=a\sec u\tan u du$. در نتیجه

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-a^2\right)^3}}=\frac{1}{a^2}\int \frac{\sec u\tan u}{\tan^3 u}du=\frac{1}{a^2}\int \frac{\sec u}{\tan^2 u}du=\frac{1}{a^2}\int \frac{\cos u}{\sin^2 u}du=-\frac{1}{a^2\sin u}$$

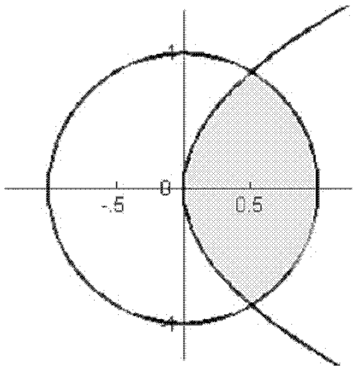
با توجه به اینکه $\sec u=\frac{x}{a}$ داریم $\cos u=\frac{a}{x}$ و بنابراین $\sin u=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$ و در نتیجه:

$$\int (x^2-a^2)^{-\frac{3}{2}} dx=-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C$$

پ: $\int \frac{3x^2+7}{(x+1)(x^2+4)}dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+7}{(x+1)(x^2+4)}dx &=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{x-1}{x^2+4}\right)dx=2\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}dx-\int\frac{1}{x^2+4}dx\\ &=\ln(x+1)^2+\ln\sqrt{x^2+4}-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}+C\end{aligned}$$

۵- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به دایره $x^{2}+y^{2}=1$ و سهمی $2y^{2}=3x$ حول محور y ها را تعیین کنید.



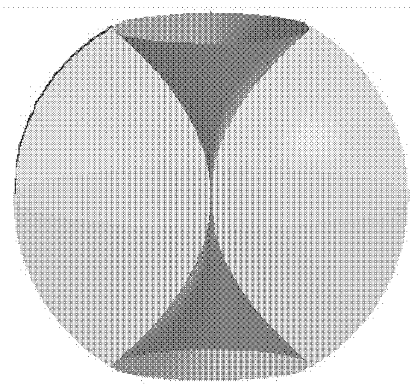
با رسم شکل نمودار توابع ناحیه مورد نظر همان طور که در شکل روبرو با پس زمینه خاکستری نمایش داده شده معین می شود. برای تعیین نقاط برخورد دو منحنی معادله $2(1-x^{2})=3x$ را حل می کنیم. این معادله دارای دو جواب -2 و $\frac{1}{2}$ برای x است. با توجه به اینکه تنها به ازای $x=\frac{1}{2}$ برای y جواب حقیقی به دست می آید، نقاط برخورد دو منحنی نقاط $\left(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ خواهد بود.

روش واشر:

$$V=2\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\pi\left((1-y^{2})-\frac{4}{9}y^{4}\right)dy=\frac{7\sqrt{3}}{10}\pi$$

روش غشا :

$$V=4\pi\int_{0}^{\frac{1}{2}}x\sqrt{\frac{3x}{2}}dx+4\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\sqrt{1-x^{2}}\,dx=\frac{7\sqrt{3}}{10}\pi$$



۶- همگرایی و واگرایی سری و انتگرال زیر را تعیین کنید:

الف: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ ب: $\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^4+x}}$

الف: آزمون نسبت را به کار می گیریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}<1$$

بنابراین سری همگراست.

ب: انتگرال را به مجموع دو انتگرال ناسره تبدیل می کنیم:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^4+x}}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^4+x}}+\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^4+x}}$$

از آزمون مقایسه نسبت با تابع $\frac{1}{x^p}$ برای هر دو انتگرال بهره می گیریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\sqrt{x^4+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{p-2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}$$

می بینیم که اگر $p=2$ حد فوق به سمت عدد یک میل می کند. با توجه به همگرا بودن $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$، انتگرال $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^4+x}}$ نیز همگراست .

از سوی دیگر داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^p}{\sqrt{x^4+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{p-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^3+1}}$$

به ازای $p=\frac{1}{2}$ حد بالا به سمت یک میل می کند. با توجه به اینکه $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ همگراست، $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^4+x}}$ نیز همگراست.

۷- شعاع و فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{n^{2n}}$ را تعیین کنید.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{(n+1)^{2n+2}}}{\frac{(-1)^n(x-1)^n}{n^{2n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}}|x-1| = |x-1|\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= |x-1|e^{-2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 0$$

در نتیجه بازه همگرایی سری کل اعداد حقیقی است.

نکته: اگر سری به شکل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n n}$ خوانده شده باشد:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}}{\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}|x-1| = \frac{|x-1|}{2}$$

در این صورت با $|x-1|<2$ بازه همگرایی به شکل $(-1,3)$ به دست می آید. با $x=3$ سری به شکل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ در می آید که یک سری متناوب با جمله عمومی نزولی و همگراست. در $x=-1$ سری به شکل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ در می آید که به وضوح واگراست. بنابراین بازه همگرایی سری $(-1,3]$ خواهد بود.

۸-سری مک لورن تابع $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ را بنویسید و به کمک آن مقدار $f^{(10)}(0)$ را به دست آورید.

سری جواب به شکل روبرو خواهد بود:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}$$

با توجه به اینکه سری حول صفر بسط داده شده ضریب $\frac{x^{10}}{10!}$، مقدار $f^{(10)}(0)$ خواهد بود. در سری بالا ضریب x^{10} عبارت است از $\frac{(-1)^5}{2^5 5!}$ بنابراین:

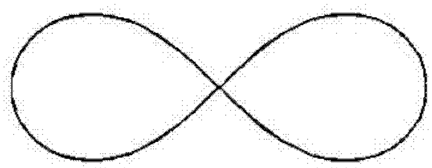
$$f^{(10)}(0)=\frac{(-1)^5}{2^5 5!}\times 10! = -\frac{6\times7\times8\times9\times10}{2^5} = -945$$

ـــ با مشتق گیری متوالی از سری نمایشگر تابع هم می توانیم به همین جواب برسیم.

۹- الف) نمودار تابع $r^۲ = \cos ۲\theta$ را رسم کنید.

ب) مساحت سطح محصور توسط نمودار قسمت الف را محاسبه کنید.

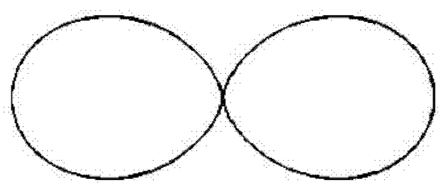
الف- با توجه به متناوب بودن تابع کافی است دامنه آن را در بازه $-\frac{\pi}{۲} \le \theta \le \frac{۳\pi}{۲}$ تعیین کنیم. به این صورت دامنه تابع $\{\theta : \cos ۲\theta \ge ۰\}$ یعنی $-\frac{\pi}{۴} \le \theta \le \frac{\pi}{۴}$ یا $\frac{۳\pi}{۴} \le \theta \le \frac{۵\pi}{۴}$ خواهد بود. با توجه به اینکه $r = \pm\sqrt{\cos ۲\theta}$ پس نمودار نسبت به قطب متقارن است. همچنین با توجه به اینکه $\cos ۲\theta = \cos ۲(-\theta)$ نمودار نسبت به محورقطبی متقارن است. به همین ترتیب با توجه به اینکه $\cos ۲(\pi - \theta) = \cos ۲\theta$ نمودار نسبت به محور عمود بر محور قطبی در مبدا نیز متقارن است. کافی است نمودار تابع را در $\left[۰, \frac{\pi}{۴}\right]$ رسم کنیم و سپس از تقارن ها استفاده کنیم.



ب- برای محاسبه سطح مورد نظر کافی است مقدار سطح را در $\left[۰, \frac{\pi}{۴}\right]$ محاسبه کرده و این مقدار را چهار برابر کنیم:

$$A = ۴\left(\frac{۱}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} r^۲ d\theta\right) = ۲\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} \cos(۲\theta) d\theta = ۱$$

نکته: اگر تابع به شکل $r^۲ = \cos^۲\theta$ در نظر گرفته شود، دامنه آن کل اعداد حقیقی خواهد شد، نمودار تابع نسبت به قطب و محور قطبی و محور عمود بر قطب متقارن است و کافی است آن را در $\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$ رسم کرده و سپس از تقارن ها بهره بگیریم.



سطح هم به همان طریق محاسبه می شود:

$$A = ۴ \times \frac{۱}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۲\theta d\theta = ۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱+\cos(۲\theta)}{۲} d\theta = \theta\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}} + \frac{\sin ۲\theta}{۲}\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{\pi}{۲}$$

۱- انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف- $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$ ب- $\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

پ- $\int \frac{dx}{2+\tan x}$ ت- $\int_2^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

الف- با توجه به اینکه $8x-x^2=16-(x-4)^2$ جانشانی $x-4=4\sin t$ را اعمال می کنیم. خواهیم داشت: $dx=4\cos t dt$ و بنابراین:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} = 4\int \frac{\cos t}{\sqrt{16(1-\sin^2 t)}}dt = \int dt = -t + C = \sin^{-1}\frac{x-4}{4}+C$$

ب- قرار می دهیم $x=t^6$ و بنابراین $dx=6t^5dt$ و

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx &= 6\int \frac{t^7+t^5}{t^3+1}dt = 6\int (t^4+t^2-t)dt - 6\int \frac{t^2-t}{(t+1)(t^2-t+1)}dt \\ &= 6\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right) - 4\int \frac{dt}{t+1} - 2\int \frac{t-4}{t^2-t+1}dt \\ &= 6\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right) - 4\ln|t+1| - \ln(t^2-t+1) + 7\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= 6\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right) - 3\ln|t+1| - \ln\left|t^3+1\right| + \frac{14\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(2t-1)\right]+C\end{aligned}$$

و بنابراین:

$$\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx = 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right) - 3\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| - \ln\left(\sqrt{x}+1\right) + \frac{14\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sqrt[6]{x}-1\right)\right]+C$$

پ- قرار می دهیم: $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ و بنابراین: $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. (در واقع جانشانی $t=\tan\frac{x}{2}$ را اعمال می کنیم)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2+\tan x} &= \int \frac{1-t^2}{(-t^2+t+1)(1+t^2)}dt = \frac{1}{5}\int \frac{-2t+1}{-t^2+t+1}dt - \frac{2}{5}\int \frac{t-2}{1+t^2}dt \\ &= \frac{1}{5}\ln(-t^2+t+1) - \frac{1}{5}\ln(1+t^2) + \frac{4}{5}\tan^{-1}t + C \\ &= \frac{1}{5}\ln\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + \frac{2x}{5} + C = \frac{1}{5}\ln\left|\cos x + \frac{\sin x}{2}\right| + \frac{2x}{5}+C\end{aligned}$$

روش دومــ می توانیم بنویسیم: $\int \frac{dx}{۲+\tan x} = \int \frac{\cos x}{۲\cos x + \sin x}dx$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\int \frac{\cos x}{۲\cos x+\sin x}dx = \ln|۲\cos x + \sin x| + ۲\int \frac{\sin x}{۲\cos x + \sin x}dx \qquad (۱۱)$$

و بنابراین:

$$x = \int dx = \int \frac{۲\cos x + \sin x}{۲\cos x + \sin x}dx \quad = ۲\int \frac{\cos x}{۲\cos x+\sin x}dx + \int \frac{\sin x}{۲\cos x + \sin x}dx$$
$$= ۲\ln|۲\cos x + \sin x| + ۵\int \frac{\sin x}{۲\cos x+\sin x}dx$$

به این ترتیب:
$$\int \frac{\sin x}{۲\cos x + \sin x}dx = -\frac{۲}{۵}\ln|۲\cos x + \sin x| + \frac{x}{۵}$$

و در نتیجه با جایگذاری این مقدار در (۱۱) خواهیم داشت :

$$\int \frac{\cos x}{۲\cos x + \sin x}dx = \frac{۱}{۵}\ln|۲\cos x+\sin x| + \frac{۲x}{۵} + C$$

ت- قرار می دهیم $x = t^۲$ و در نتیجه خواهیم داشت $dx = ۲tdt$ و بنابراین: $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = ۴\int \ln t dt$

با انتگرال گیری جزء به جزء و $\ln t = u$ و $dx = dv$ خواهیم داشت:

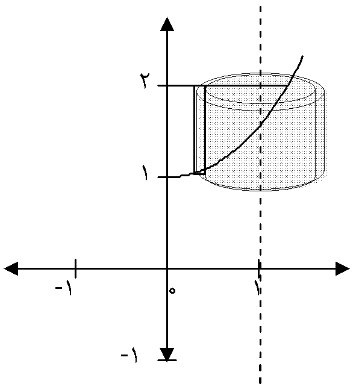
$$I = ۴t\ln t - ۴\int dt = ۴t(\ln t - ۱) = ۴\sqrt{x}\left(\ln\sqrt{x} - ۱\right) + C$$

با توجه به اینکه $\lim_{x\to\infty} ۴\sqrt{x}\left(\ln\sqrt{x}-۱\right)$ وجود ندارد بنابراین انتگرال واگراست.

نکته: با توجه به اینکه به ازای هر $x > e$ داریم: $\sqrt{x}\ln x > ۱$ یا $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} > \frac{۱}{x}$ ، به سادگی مـی تـوان در همان آغاز کار از واگرا بودن انتگرال اطمینان حاصل کرد.

۲- الف- ناحیه محدود به منحنی $y=\cosh x$ و خط $y=2$ را حول خط $x=1$ دوران داده ایم. حجم حاصل را بیابید.

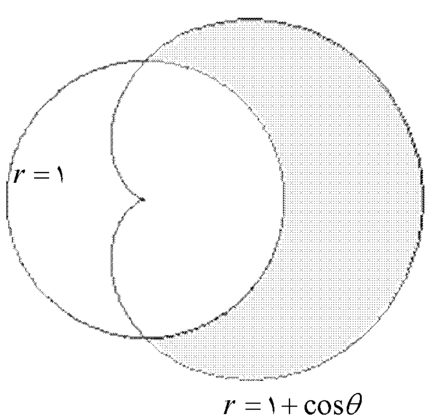
ب- مساحت داخل دلوار $r=1+\cos\theta$ و خارج دایره $r=1$ را به دست آورید.



الف- با توجه به اینکه در دوران ناحیه مورد نظر قسمتی که در سمت راست خط $x=1$ قرار دارد، در جسم حاصل از دوران ناحیه سمت چپ قرار می گیرد، لازم نیست در محاسبه حجم به حساب گرفته شود. از روش غشا برای محاسبه حجم حاصل بهره می گیریم. طول مستطیل تقریب ساز برابر است با $2-\cosh x$ و به این ترتیب حجم به شکل زیر محاسبه می شود:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 2\pi(1-x)(2-\cosh x)dx = 2\pi\left(2\int_0^1 dx - 2\int_0^1 x dx - \int_0^1 \cosh dx + \int_0^1 x\cosh x dx\right) \\
&= 2\pi\Big[2x - x^2 - \sinh x + x\sinh x - \cosh x\Big]_0^1 = 4\pi - 2\pi - \sinh 1 + \sinh 1 - \cosh 1 + 1 \\
&= 2\pi + 1 - \cosh 1
\end{aligned}
$$

ب- نقاط برخورد با حل معادله $1=1+\cos\theta$ به دست می آیند. این نقاط عبارتند از $(1,\frac{\pi}{2})$ و $(1,-\frac{\pi}{2})$ و به این ترتیب:



$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((1+\cos\theta)^2 - 1\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos\theta + \cos^2\theta\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

۳- همگرایی یا واگرایی $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx$ را تعیین کنید.

تابع e^{-x^2} همه جا تعریف شده و بنابراین انتگرال از نوع اول است. با توجه به اینکه به ازای $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=0$ بنابر آزمون مقایسه حدی انتگرال همگراست.

۴- نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$ همگرای مشروط است.

با توجه به اینکه به ازای $n\ge 1$ مقدار $\sin\frac{1}{n}$ مثبت است، سری مذکور یک سری متناوب است. دنباله $\sin\frac{1}{n}$ یک دنباله نزولی است و با توجه به متناوب بودن سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$، این سری همگراست. از سوی دیگر با توجه به واگرا بودن سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ و بنابر آزمون مقایسه حدی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ واگراست: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$

و در نتیجه سری مورد بحث همگرایی مطلق ندارد.

۵- شعاع و فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{n^2+1}$ را بیابید.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)^2+1}}{\frac{(x+1)^n}{n^2+1}}\right|=|x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=|x+1|$$

برای اینکه $|x+1|<1$ بایستی $-2<x<0$. سری در نقطه $x=0$ به شکل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ در می آید که به وضوح همگراست. در نقطه $x=-2$ سری به شکل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ در می آید که هم ارز با سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ است و همگراست و بنابراین بازه همگرایی سری به شکل $[-2,0]$ خواهد بود.

۶- بسط ماک لوران تابع $f(x)=x^2e^{x+1}$ را به دست آورید.

با توجه به اینکه $e^{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!}$ بسط ماک لوران تابع مورد نظر با ضرب x^2 در این سری به دست می آید: $x^2e^{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2(x+1)^n}{n!}$

۱- اگر α, β ریشه های معادله $z^۲ - ۲z + ۴ = ۰$ باشند، نشان دهید که $\alpha^n + \beta^n = ۲^{n+۱}\cos\frac{n\pi}{۳}$.

داریم: $\alpha = ۱ + \sqrt{۳}i = ۲\left(\cos\frac{\pi}{۳} + i\sin\frac{\pi}{۳}\right)$ و $\beta = ۱ - \sqrt{۳}i = ۲\left(\cos\frac{\pi}{۳} - i\sin\frac{\pi}{۳}\right)$ بنابراین به ازای هر n طبیعی داریم:

$$\alpha^n = ۲^n\left(\cos\frac{\pi}{۳} + i\sin\frac{\pi}{۳}\right)^n = ۲^n\left(\cos\frac{n\pi}{۳} + i\sin\frac{n\pi}{۳}\right)$$

$$\beta^n = ۲^n\left(\cos\frac{\pi}{۳} - i\sin\frac{\pi}{۳}\right)^n = ۲^n\left(\cos\frac{n\pi}{۳} - i\sin\frac{n\pi}{۳}\right)$$

با جمع دو رابطه بالا حکم برقرار است.

۲-حدهای $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=۱}^{n}\frac{n^۲}{i\left(i^۲+n^۲\right)}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x^۲+۱}{x^۲+۲}}{e^{\frac{۱}{x}} - e^{\frac{۱}{x^۲}}}$ را محاسبه کنید.

با جابجایی عبارات جبری می توانیم بنویسیم:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n^۲}{i\left(i^۲+n^۲\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{\frac{i}{n}\left(\frac{i^۲}{n^۲}+۱\right)}$$

حد اخیر موجود است اگر و فقط اگر $\int_۰^۱\frac{dx}{x(x^۲+۱)}$ موجود باشد. این انتگرال را می توان به شکل $\int_۰^۱\frac{dx}{x} - \int_۰^۱\frac{x}{x^۲+۱}dx$ نوشت که به وضوح واگراست.

_در مورد حد دوم از قاعده هوپیتال بهره می گیریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x^۲+۱}{x^۲+۲}}{e^{\frac{۱}{x}} - e^{\frac{۱}{x^۲}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۲x}{x^۲+۱} - \frac{۲x}{x^۲+۲}}{۲\frac{e^{\frac{۱}{x^۲}}}{x^۳} - \frac{e^{\frac{۱}{x}}}{x^۲}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۴}{(x^۴+۳x^۲+۲)}\left(۲e^{\frac{۱}{x^۲}} - xe^{\frac{۱}{x}}\right)^{-۱} = ۰$$

۳-انتگرال های $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos x dx$ و $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ و $\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}$ را محاسبه کنید.

_درمورد نخستین انتگرال از انتگرال گیری جزء به جزء بهره می گیریم:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos x dx = e^{-x}\sin x\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\sin x dx \qquad u = e^{-x} \text{ و } v = \sin x$$

$$= -e^{-x}\cos x\Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos x dx \qquad u = e^{-x} \text{ و } v = -\cos x$$

$$= 1 - \int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos x dx$$

و بنابراین: $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos x dx = \frac{1}{2}$

_در مورد انتگرال دوم جانشانی $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ را اعمال می کنیم:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + C = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

در مورد انتگرال سوم جانشانی $x = t^6$ را اعمال می کنیم:

$$\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx = 6\int \frac{t^7+t^5}{1+t^3}dt = 6\int (t^4+t^2-t)dt - 6\int \frac{t^2-t}{t^3+1}dt$$

$$= 6\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right) - 4\int \frac{dt}{t+1} - 2\int \frac{t-2}{t^2-t+1}dt$$

$$= 6\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right) - 4\ln|t+1| - \ln\left|t^2-t+1\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) + C$$

که انتگرال آخر را به شکل زیر محاسبه کرده ایم:

$$\int \frac{t-2}{t^2-t+1}dt = \frac{1}{2}\ln\left|t^2-t+1\right| - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2-t+1}$$

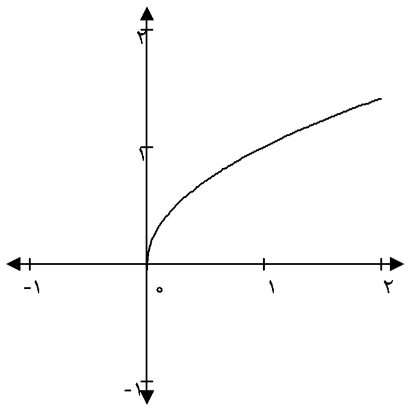
$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2-t+1\right| - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2-t+1\right| - \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)$$

بنابراین:

$$\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx = 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right) - 4\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| - \ln\left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt[6]{x}-\frac{1}{2}\right)\right) + C$$

۴- تابع $y=\sqrt{x}$ را در بازه $x\in[۰,۲]$ حول محور x ها دوران می دهیم. حجم و سطح جسم حاصل را پیدا کنید.



$$V=\int_{۰}^{۲}\pi(\sqrt{x})^{۲}dx=\pi\left.\frac{x^{۲}}{۲}\right|_{۰}^{۲}=۲\pi$$

$$A=\int_{۰}^{۲}۲\pi\sqrt{x}\sqrt{۱+\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)^{۲}}\,dx$$

$$=\pi\int_{۰}^{۲}\sqrt{۱+۴x}\,dx=\frac{\pi}{۶}\left.\sqrt{(۱+۴x)^{۳}}\right|_{۰}^{۲}=\frac{۱۳}{۳}\pi$$

۵-فاصله همگرایی سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{\ln(۱+n)}{n}(x-۵)^{n}$ را به دست آورده و روی نقاط انتهایی فاصله همگرایی بحث کنید.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(۲+n)}{n+۱}|x-۵|^{n+۱}}{\frac{\ln(۱+n)}{n}|x-۵|^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(۱+(۱+n))^{\frac{۱}{n+۱}}}{\ln(۱+n)^{\frac{۱}{n}}}|x-۵|=|x-۵|$$

بنابراین در صورتی که $|x-۵|<۱$ یا $۴<x<۶$ سری همگراست. اما درصورتی که $x=۴$ آنگاه سری به شکل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\ln(۱+n)}{n}$ در می آید، که بنابر واگرایی سری همساز، واگراست. در صورتی که $x=۶$ سری به شکل $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{\ln(۱+n)}{n}$ در می آید که یک سری متناوب است که قدر مطلق جملات آن یک دنباله نزولی می سازد و بنابراین همگراست. پس بازه همگرایی سری به شکل $(۴,۶]$ خواهد بود.

۶- برحسب مقادیر مختلف α در همگرایی انتگرال $\int_{۰}^{\infty}x^{\alpha-۱}e^{-x}dx$ بحث کنید.

می توانیم این انتگرال ناسره را به مجموع دو انتگرال ناسره تبدیل کنیم :

$$\int_{۰}^{\infty}x^{\alpha-۱}e^{-x}dx=\int_{۰}^{۱}x^{\alpha-۱}e^{-x}dx+\int_{۱}^{\infty}x^{\alpha-۱}e^{-x}dx$$

در مورد انتگرال $\int_{۰}^{۱}x^{\alpha-۱}e^{-x}dx$ با بهره گیری از آزمون مقایسه حدی داریم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x^{\alpha-۱}e^{-x}}{\frac{۱}{x^p}} = \lim_{x\to ۰} x^{p+\alpha-۱}e^{-x} = \lim_{x\to ۰} x^{p+\alpha-۱}$$

بنابراین در صورتی که $p+\alpha-۱>۰$ و $p<۱$، یعنی در صورتی که $\alpha>۰$ انتگرال همگراست.

در مورد انتگرال $\int_۱^\infty x^{\alpha-۱}e^{-x}dx$ هم از آزمون مقایسه حدی بهره می گیریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha-۱}e^{-x}}{\frac{۱}{x^p}} = \lim_{x\to\infty} x^{p+\alpha-۱}e^{-x} = ۰$$

یعنی اگر $p>۱$ باشد، حد صفر می شود و انتگرال مورد نظر همگراست. بنابراین مجموع دو انتگرال به ازای $\alpha>۰$ همگراست.

۷- الف) بسط ماک لوران تابع $\tan^{-۱} x$ را به دست آورید.

ب)به کمک قسمت الف بسط ماک لوران $x\tan^{-۱} x-\frac{۱}{۲}\ln(x^۲+۱)$ را محاسبه کنید.

الف) با توجه به اینکه $\frac{d}{dx}\tan^{-۱} x=\frac{۱}{۱+x^۲}$ و به ازای $-۱<x<۱$ بسط زیر معتبر است،

$$\frac{۱}{۱+x^۲}=۱-x^۲+x^۴-x^۶+\cdots=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n x^{۲n}$$

خواهیم داشت:

$$\tan^{-۱} x=\int\frac{dx}{۱+x^۲}=\int\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n x^{۲n}dx=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\int x^{۲n}dx=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱}+C$$

و با توجه به اینکه $\tan^{-۱}۰=۰$ مقدار $C=۰$ به دست می آید، داریم:

$$\tan^{-۱} x=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱}$$

ب) داریم:

$$\ln(x^۲+۱)=x^۲-\frac{x^۴}{۲}+\frac{x^۶}{۳}-\frac{x^۸}{۴}+\cdots=\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{x^{۲n}}{n}$$

و بنابراین:

$$\begin{aligned} x\tan^{-۱} x-\frac{۱}{۲}\ln(x^۲+۱) &= \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱}-\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{۲n}}{۲n} \\ &= x+\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\frac{x^۵}{۵}+\frac{x^۶}{۶}-\frac{x^۷}{۷}-\frac{x^۸}{۸}+\cdots \end{aligned}$$